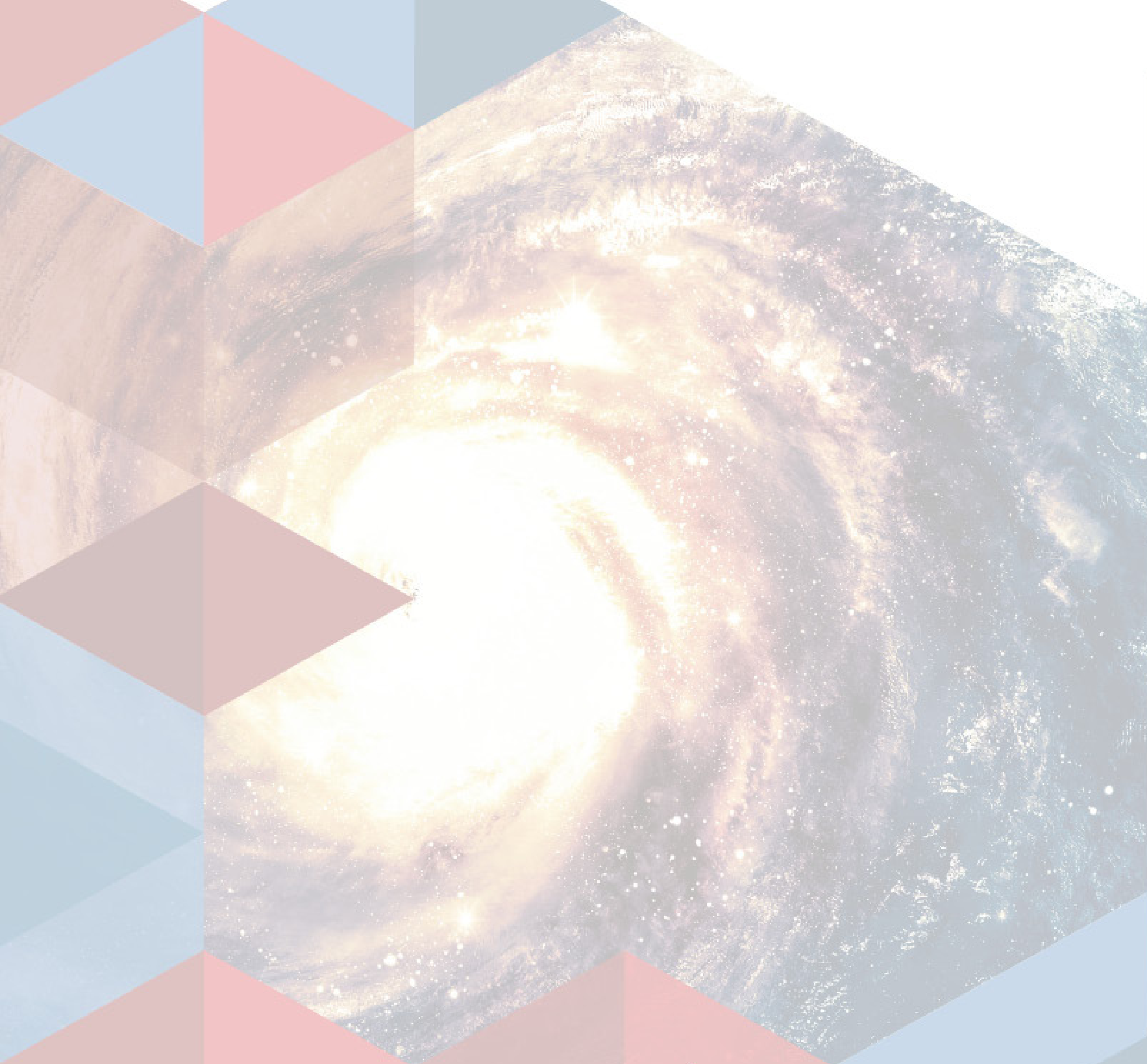
Matemáticas 2



Director de publicaciones
Wilebaldo Nava Reyes

Diseño de la serie, interiores y portada
Raymundo Ríos Vázquez

Diagramación y edición digital
Felicia Garnett Ruiz

Coordinación iconográfica
Cristina Anguiano

Matemáticas 2
ISBN:

Primera edición:

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana.
Reg. Núm. 3864

Impreso en México/*Printed in Mexico*

Presentación

Estimado alumno:

El libro que tienes en tus manos, Matemáticas 2, se escribió teniendo en cuenta los avances más recientes sobre la forma de enseñar y aprender matemáticas. Es una obra apegada al nuevo enfoque de enseñanza y fue diseñada pensando en tu curiosidad y en la disposición para enfrentarte a los problemas y resolverlos; el objetivo final, es ayudarte en tu estudio y aprendizaje de las matemáticas.

En este libro encontrarás problemas que tal vez no puedas resolver solo, pero te harán pensar, reflexionar, argumentar y compartir dudas y aciertos con otros estudiantes para poderlos resolver; el trabajo en equipos te brindará la oportunidad de conocer otras opiniones y puntos de vista para que finalmente puedas continuar aprendiendo con cada actividad que realicen.

Si alguna vez tú o algún otro miembro del equipo se equivoca, no se preocupen, todo es parte del aprendizaje. Al intercambiar ideas y escuchar a los demás, para corregir, aprenderán también de sus errores.

Solucionar cada una de las lecciones de este libro representará un reto, pero con los conocimientos previos que posees y tu perseverancia en el trabajo cotidiano, estamos seguros que lo lograrás y cada vez tu capacidad de resolver problemas más complejos será mayor, además de que podrás aplicar lo que aprendas en tu vida cotidiana y en otras materias de estudio.

En el libro también se incluyen actividades con tecnología, para que aprendas a usarla y a sacar provecho de los avances que en este rubro surgen para ir avanzando cada vez más en tu aprendizaje.

Esperamos que conforme avances en las lecciones del libro, las matemáticas se conviertan para ti en una manera interesante y útil de conocer la realidad, y te animes así a seguir explorando lo fascinante que son.

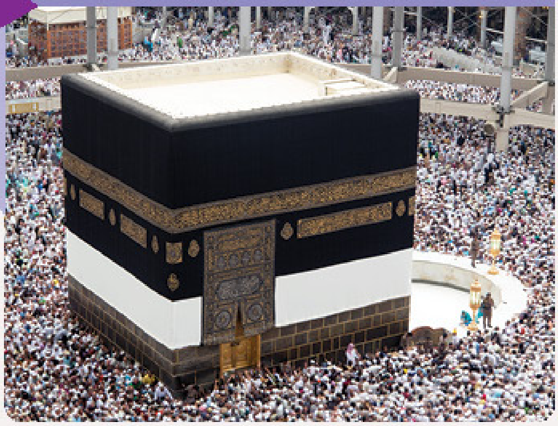
Te deseamos éxito en este curso.

Los autores

Índice

Trimestre 1

Trimestre 2



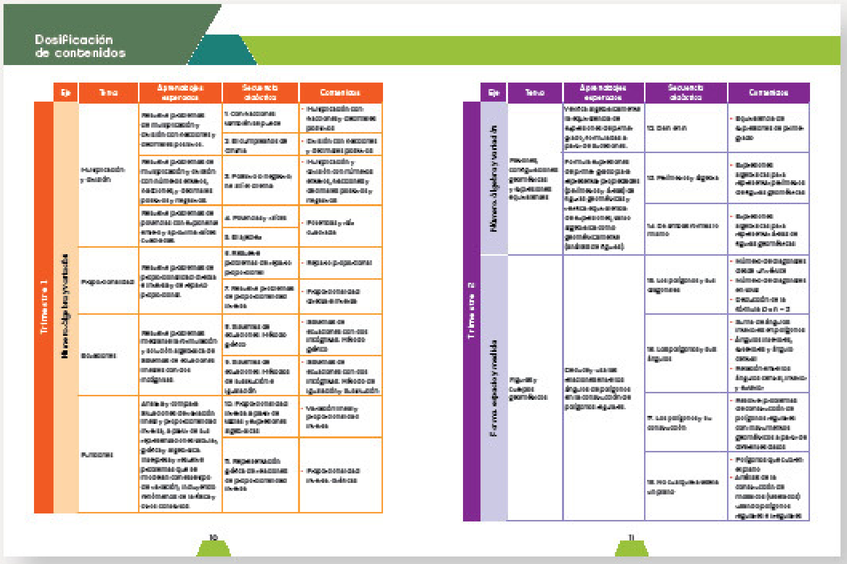
Trimestre 3

Componentes de tu libro

El libro que tienes en tus manos fue elaborado con una diversidad de contenidos y actividades que se concretaron en la estructura siguiente. Estamos seguros que te será de gran interés. Adelante, conócelo.

Dosificación de contenidos

Te muestra la dosificación de los contenidos que desarrolla este libro. Se presentan los ejes, temas, aprendizajes esperados y contenidos que debes lograr en los trimestres. Además, se incluye el nombre de las secuencias didácticas que están asociadas a cada aprendizaje esperado.



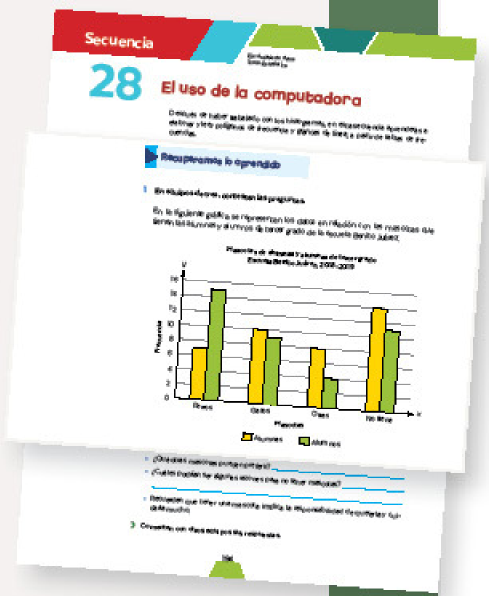
Entrada de trimestre

Recomiendo este libro para leer

Leerás un breve texto que se titula *Recomiendo este libro* en donde se sintetizan los contenidos del trimestre, mismo que se acompaña de una imagen que busca inspirar y motivarte en tu aprendizaje. Las imágenes que se presentan están asociadas con un tema del trimestre.

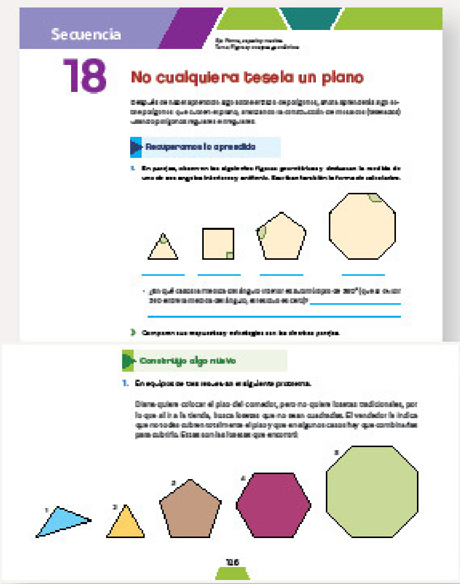
Secuencias didácticas

Los aprendizajes esperados se organizan en secuencias didácticas. En estas te presentamos los contenidos y actividades que te permitirán construir tus conocimientos, desarrollar tus habilidades y ponerlas en práctica.
Las **secuencias didácticas** se trabajan en tres momentos:



Recuperamos lo aprendido

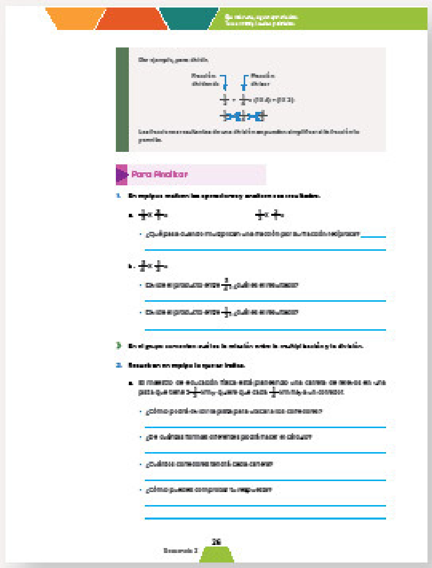
En esta etapa se presenta un reto o una situación que debe resolverse para que planees con tu equipo de trabajo cómo resolver el reto. Te presentará el producto que elaborarás y su relación con otra asignatura.



Construyo algo nuevo

Esta sección te propone preguntas cuya respuesta te permitirá argumentar tus procedimientos de solución y puedas compararlos con otros procedimientos. Además, se presentan diversas situaciones y contextos cercanos a ti para que tu aprendizaje sea significativo.

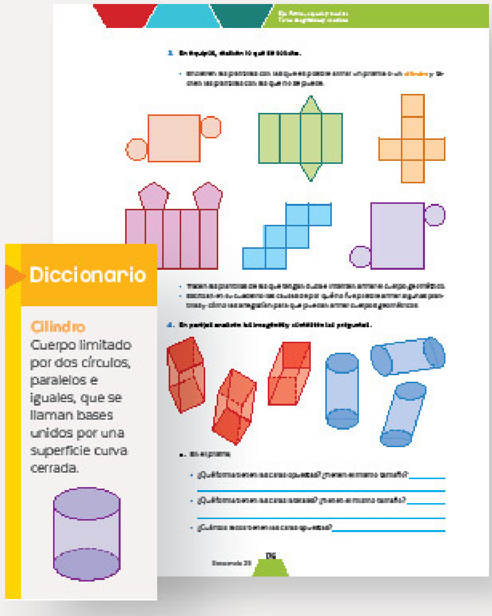
Es el momento más importante para la construcción de tu conocimiento.



Para finalizar

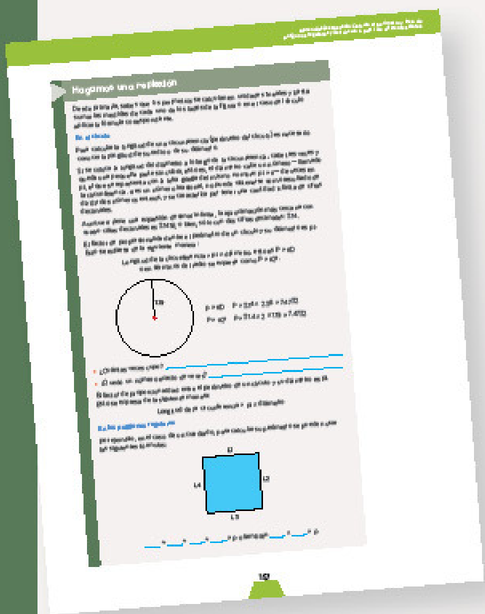
Se presentan actividades de mayor complejidad que las trabajadas durante los otros dos momentos didácticos.

Durante las **secuencias didácticas** se incluyen una serie de apartados y secciones:



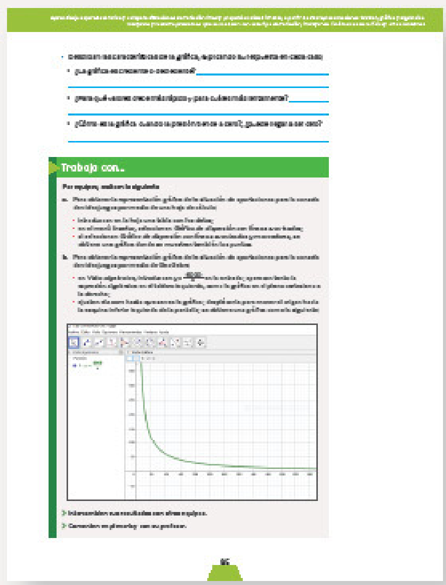
Diccionario

Incluye definición de palabras que pueden ser de difícil comprensión.



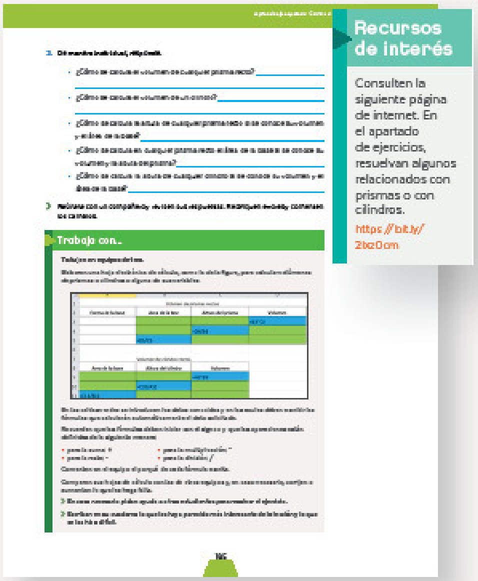
Hagamos una reflexión

Este apartado se presenta durante las secuencias didácticas, específicamente en el momento *Construyo algo nuevo* y su finalidad es proporcionarte información conceptual y procedimental para formalizar lo visto durante la secuencia. *Hagamos una reflexión* viene seguida de ejercicios para que pongas en práctica nuevamente tus conocimientos y revises tus avances.



Trabaja con...

Se trabajan durante las secuencias didácticas, algunos contenidos (actividades) con la hoja de cálculo o Geogebra. El objetivo es contribuir a que desarrolles habilidades digitales. Estas actividades puedes realizarlas fuera de clase o durante ella.

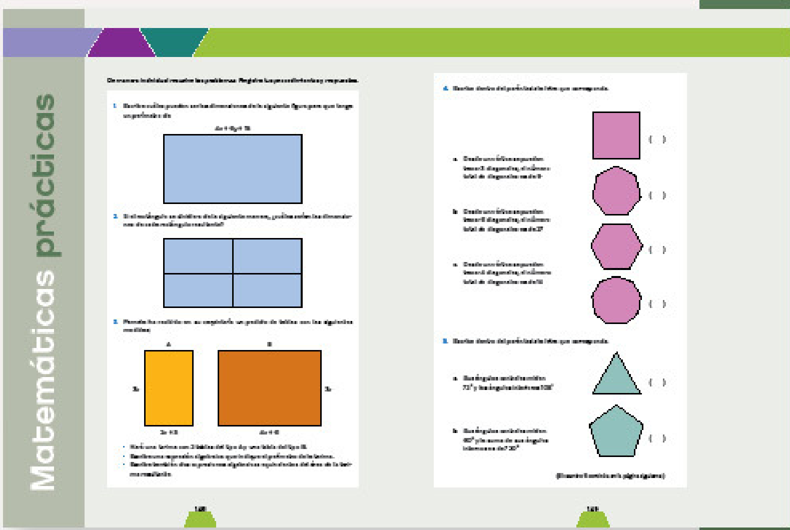


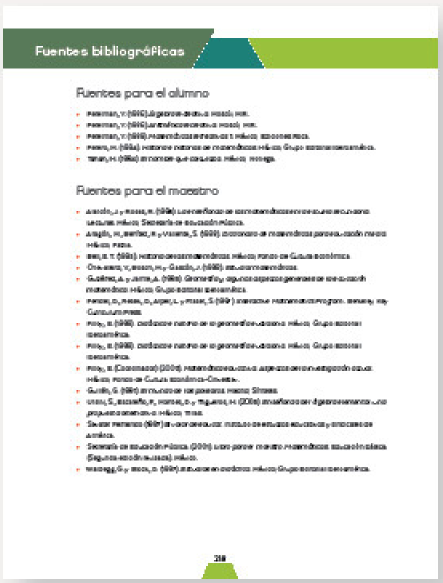
Recursos de interés

En este apartado, te sugerimos páginas electrónicas, materiales interactivos, actividades, problemas, entre otros, para reforzar tus conocimientos sobre un tema en particular de los contenidos matemáticos.

Matemáticas prácticas

Esta sección se presenta al final del trimestre y fue diseñada con la finalidad de hacerte ver cómo estás utilizando tu capacidad de análisis, tu argumentación en la resolución de problemas y también para que conozcas la profundidad de tus aprendizajes e identifiques las dudas específicas sobre temas particulares vistos durante el trimestre.





Fuentes bibliográficas

Encontrarás algunas de las referencias más importantes que fueron utilizadas para diseñar tu libro y que te permitirán profundizar, cotejar y apreciar las ideas plasmadas en el material.

Dosificación de contenidos

	Eje	Tema	Aprendizajes esperados	Secuencia didáctica	Contenidos
Trimestre 1	Número, álgebra y variación	Multiplicación y división	Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.	1. Con fracciones también se puede	· Multiplicación con fracciones y decimales positivos
				2. El cumpleaños de Cinthia	· División con fracciones y decimales positivos
			Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones, y decimales positivos y negativos.	3. Positivo o negativo: he allí el dilema	· Multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos
			Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.	4. Potencias y raíces	· Potencias y raíz cuadrada
				5. El ajedrez	
		Proporcionalidad	Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.	6. Resuelve problemas de reparto proporcional	· Reparto proporcional
				7. Resuelve problemas de proporcionalidad inversa	· Proporcionalidad directa e inversa
		Ecuaciones	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	8. Sistemas de ecuaciones. Método gráfico	· Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Método gráfico
				9. Sistemas de ecuaciones. Métodos de sustitución e igualación	· Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Método de igualación y sustitución
		Funciones	Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.	10. Proporcionalidad inversa a partir de tablas y expresiones algebraicas	· Variación lineal y proporcionalidad inversa
				11. Representación gráfica de relaciones de proporcionalidad inversa	· Proporcionalidad inversa. Gráficas

	Eje	Tema	Aprendizajes esperados	Secuencia didáctica	Contenidos
Trimestre 2	Número, álgebra y variación	Patrones, configuraciones geométricas y expresiones equivalentes	Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.	12. De n en n	· Equivalencia de expresiones de primer grado
			Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de figuras).	13. Perímetros y álgebra	· Expresiones algebraicas para representar perímetros de figuras geométricas
				14. De ambas formas lo mismo	· Expresiones algebraicas para representar áreas de figuras geométricas
	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos geométricos	Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.	15. Los polígonos y sus diagonales	· Número de diagonales desde un vértice · Número de diagonales en total · Deducción de la fórmula $D = n - 3$
				16. Los polígonos y sus ángulos	· Suma de ángulos interiores en polígonos · Ángulos interiores, exteriores y ángulo central · Relación entre los ángulos central, interior y exterior
				17. Los polígonos y su construcción	· Resolver problemas de construcción de polígonos regulares con instrumentos geométricos a partir de diferentes datos
				18. No cualquiera tesela un plano	· Polígonos que cubren el plano · Análisis de la construcción de mosaicos (teselados) usando polígonos regulares e irregulares

	Eje	Tema	Aprendizajes esperados	Secuencia didáctica	Contenidos
Trimestre 2	Forma, espacio y medida	Magnitudes y medidas	Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).	19. El Sistema Internacional de Unidades (SI)	· Sistema Internacional de Medidas · Conversión de unidades
				20. El sistema inglés	· Sistema inglés · Conversión de unidades
				21. Conversiones entre sistemas	· Conversión de unidades entre sistemas

	Eje	Tema	Aprendizajes esperados	Secuencia didáctica	Contenidos
Trimestre 3	Forma, espacio y medida	Magnitudes y medidas	Calcula el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.	22. Por la orilla	· Perímetro de polígonos regulares e irregulares · Perímetro del círculo
				23. El área de un polígono	· Uso de las fórmulas del cálculo de área de triángulos y cuadriláteros para calcular el área de polígonos irregulares y regulares
				24. Área del círculo	· Cálculo del área del círculo
			Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.	25. Construcción de prismas y cilindros	· Construcción de los prismas y el cilindro · Cálculo del volumen de prismas con base regular y el cilindro

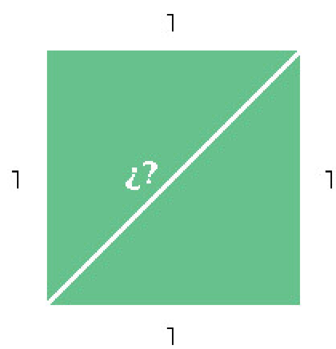
	Eje	Tema	Aprendizajes esperados	Secuencia didáctica	Contenidos
Trimestre 3	Forma, espacio y medida	Magnitudes y medidas	Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.	26. Volumen de prismas, cilindros y otros cálculos	· Calculo de alguna de sus dimensiones, dados algunos datos
	Análisis de datos	Estadística	Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea	27. Lanzamiento de bala	· Recolecta datos · Elabora y utiliza histogramas
				28. El uso de la computadora	· Recolecta datos · Elabora y utiliza polígonos de frecuencias y gráficas de línea
			Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión	29. Descripción de conjuntos de datos	· Descripción de conjuntos de datos mediante sus medidas de tendencia central y de dispersión
		Probabilidad	Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio	30. Probabilidad teórica de un evento	· Experimentos aleatorios y probabilidad teórica · Comparación con probabilidad frecuencial

Trimestre 1

La leyenda de Hipaso de Metaponto

Hipaso de Metaponto vivió en el siglo V a. n. e. y era un seguidor de la antigua filosofía griega llamada pitagórica en honor a Pitágoras, el cual estaba cierto que todo podía ser relacionado con números naturales (1, 2, 3, 4, 5, ...) o con razones de ellos como $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{14}{25}$; y en la escuela pitagórica pensaban que los números definían ciertas cualidades, relacionaban al número 2 con la mujer, al 3 con el hombre, al 5 con el matrimonio y al 7 con la salud, descubrieron también la relación que guardan las notas musicales, entre otras muchas cosas.

Sin embargo, Hipaso de Metaponto, cuando trabajaba con un cuadrado con longitud de lados 1, descubrió que la diagonal no podía ser representada como la razón de dos números enteros, lo cual echaba abajo toda la filosofía pitagórica, motivo por el que Hipaso, según cuenta la leyenda, fue arrojado al mar como castigo y murió. Sin embargo, su descubrimiento no permaneció en secreto y en la actualidad se conocen diferentes tipos de números, incluidos los irracionales, descubiertos por Hipaso.



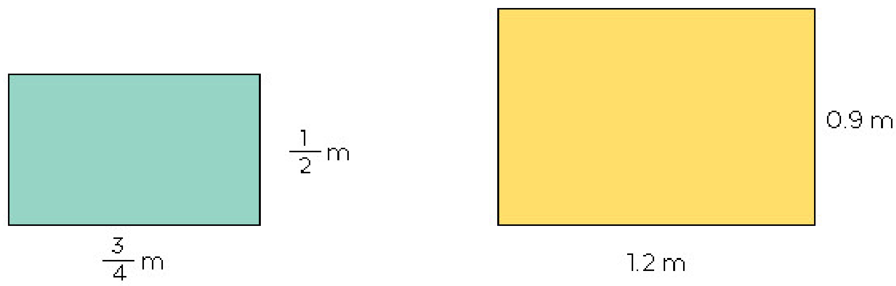
1 Con fracciones también se puede

En el ciclo escolar pasado estudiaste fracciones y en este ciclo continuarás con ese aprendizaje. En esta secuencia estudiarás la multiplicación con fracciones y decimales positivos.

Recuperamos lo aprendido

1. **En equipos resuelvan el siguiente problema.**

Doña Catalina quiere cubrir con loseta dos espacios para colocar unas macetas.



- ¿Cuánto medirá el área de cada espacio rectangular?
- Espacio 1: ______________ Espacio 2: ______________

> Comenten al interior del equipo las diferentes estrategias que pueden seguir para resolver el problema. Justifiquen sus respuestas.

- ¿La estrategia para calcular el área del primer rectángulo servirá para el segundo?

____

____

- ¿Habrá una estrategia que sirva para calcular el área de ambos rectángulos?

____

____

> Comparen sus estrategias con las de otros equipos y observen similitudes y diferencias.

Construyo algo nuevo

1. **En equipos de 3 integrantes resuelvan el siguiente problema.**

Jorge es ayudante de Lucio, que es carpintero, y hoy, al llegar al trabajo, encontró en unas tiras de madera el siguiente recado:

Jorge: marca las $\frac{3}{4}$ partes de cada tira de madera, que miden 0.8 m, pues es el lugar en donde irán pegadas, hazlo con cuidado. Por favor, deja indicado a qué altura las marcaste para señalar después esa misma altura en la otra parte del mueble. Si no lo haces bien el mueble puede quedar chueco.

Jorge planteó la siguiente operación: $\frac{3}{4} \times 0.8 =$

Pero, nunca había resuelto una operación como esa.

> **En el equipo discutan.**

- ¿Qué procedimiento seguirían? ______________________________
____
- ¿Cómo se multiplica una fracción por un número decimal? ______________________________
____
- ¿Es necesario convertir la fracción a un número decimal? ______________________________
- ¿Es necesario convertir el número decimal a fracción? ______________________________
- ¿El resultado se puede obtener multiplicando la fracción por el decimal como si fuera número entero? ______________________________
- ¿Seguirán una estrategia diferente a las anteriores? ______________________________
____

> **Justifiquen sus respuestas.**

- ¿Cuál es el resultado que deberá dar Jorge a Lucio? ______________________________
____

> **Cuando trabajen en equipo, escuchen con respeto y permitan que todos expresen sus puntos de vista y participen.**

Hagamos una reflexión

En parejas discutan sobre el problema de Jorge:

- ¿Cuál es el procedimiento que ustedes seguirían?
- ¿A qué decimal equivale $\frac{3}{4}$?
- ¿Cuál es la fracción que corresponde a 0.8?

Si se decide resolver la operación escribiendo los dos números como fracciones comunes:

- ¿Cómo quedaría expresada la operación y cuál sería el resultado?

Si se decide resolver la operación escribiendo los dos números como decimales:

- ¿Cómo quedaría expresada la operación y cuál sería el resultado?

Si se decide resolver la operación usando la fracción $\frac{3}{4}$ y el decimal 0.8:

- ¿Cómo quedaría expresada la operación y cuál sería el resultado?

En algunas conversiones a número decimal, en las divisiones el cociente tendrá un número finito de cifras y el residuo será cero, por lo que este número corresponde a una fracción decimal.

En otros casos el cociente puede tener un número infinito de cifras y siempre habrá un residuo, por lo que solamente obtendrás una aproximación. Las fracciones de las que no obtienes un número decimal exacto no son decimales.

> Retomen el problema de Jorge y verifiquen sus respuestas.

Para finalizar

1. **Resuelve los problemas.**

   a. Lucio, que es un poco bromista, al llegar a la tortería dijo: me da dos tercios de torta y media. El dependiente que sí sabía matemáticas, lo despachó correctamente.

   - ¿Qué cantidad de torta le dio? ____________________
   - ¿Cómo resolviste el problema? ____________________

   b. La familia García viajó a un pueblo de Oaxaca llamado Yanhuitlán; se detuvieron a desayunar cuando habían avanzado las $\frac{2}{5}$ partes de un viaje de 385.8 km.

   - ¿Cuánto habían avanzado hasta el lugar del desayuno? ____________________
   - ¿Qué fracción del viaje faltaba por recorrer? ____________________
   - ¿Cuántos kilómetros les faltaban para llegar a su destino? ____________________
   - Si multiplicas $\frac{3}{5}$ por 385.8, el resultado ¿a qué pregunta responde? ____________________

   c. Inventa un problema para cada una de las siguientes operaciones y resuélvelo. Puedes preguntar a tus familiares o amistades para saber si han tenido que resolver un problema que involucre alguna operación semejante a las planteadas. Explica a otros estudiantes el contexto y significado de tus problemas.

   - $\frac{5}{6} \times 16.4$
   - $\frac{2}{3} \times 20$
   - $45.5 \times \frac{1}{2}$
   - $125.25 \times \frac{4}{5}$

> **Expongan de manera grupal sus resultados y sus problemas inventados con sus respectivas soluciones.**

Trabaja con...

En equipos elaboren en una hoja electrónica de cálculo diferentes tablas que multipliquen fracciones en diferentes representaciones.

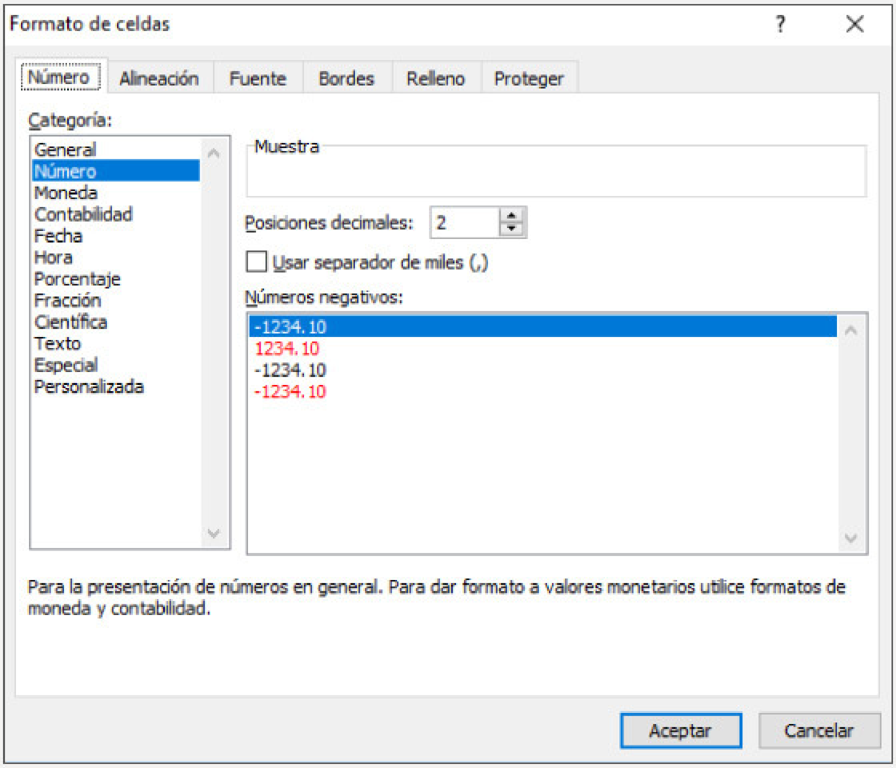
a. Multiplicación de números decimales.

Elaboren la siguiente tabla:

C3 ▾ f_x =A3*B3

	A	B	C
1		Multiplicación de fracciones	
2	Número decimal 1	Número decimal 2	Producto
3			0.00
4			0.00
5			0.00
6			0.00
7			0.00

Seleccionen las celdas desde A3 hasta C7 y con clic derecho seleccionen Formato de celdas y elijan Número con 2 posiciones decimales.



No olviden escribir en la columna C las fórmulas para multiplicar (como la que se ve en la primera imagen).

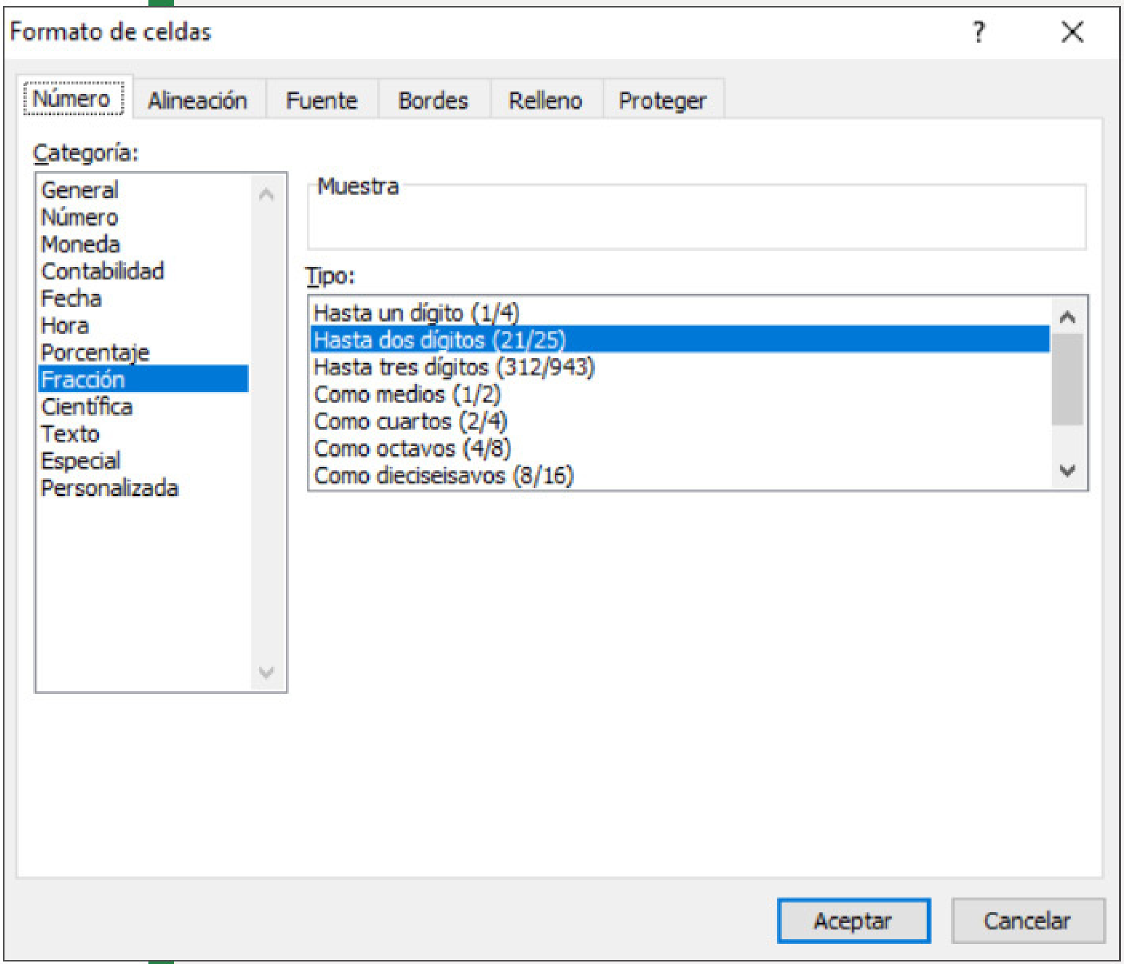
Prueben su tabla escribiendo algunos números para conocer su producto.

b. Multiplicación de números fraccionarios.

Elaboren la siguiente tabla:

	A	B	C
8			
9	Multiplicación de fracciones		
10	Número fraccionario 1	Número fraccionario 2	Producto
11			0
12			0
13			0
14			0
15			0

Seleccionen las celdas desde A11 hasta C15 y con clic derecho seleccionen Formato de celdas y elijan Fracción hasta dos dígitos.



Prueben su tabla escribiendo varios números para calcular su producto. No olviden anotar las fórmulas en la columna C.

c. Elaboren otras dos tablas y den a las celdas el formato que corresponde (decimal o fracción).

	A	B	C
16			
17	Multiplicación de fracciones		
18	Número fraccionario 1	Número decimal 2	Producto
19			0.00
20			0.00
21			0.00
22			0.00
23			0.00
24			
25	Multiplicación de fracciones		
26	Número fraccionario 1	Número decimal 2	Producto
27			0
28			0
29			0
30			0
31			0

Usen sus tablas para comprobar la equivalencia de multiplicar números escritos en forma decimal o de fracción común. Por ejemplo, representen en diferentes formas las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$ y prueben que su producto es el mismo, pero con diferentes representaciones.

- En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.
- Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

2 El cumpleaños de Cinthia

Estudiaste ya la multiplicación con fracciones y decimales y ahora, para seguir avanzando, estudiarás la división con fracciones y decimales positivos.

Recuperamos lo aprendido

1. **Con lo aprendido completen en parejas la siguiente tabla.**

Super "La Victoria"			
Producto	**Costo por kilogramo**	**Cantidad comprada**	**Total**
Arroz	\$29.50	0.450 kg	
Salmón	\$175.20	$\frac{3}{4}$ kg	
Queso parmesano	\$88.70	300 g	
		Total a pagar:	

Para resolver el problema anterior hay varios caminos; una vez que tengan el resultado comparen sus respuestas con las de otros estudiantes para ver cómo es que cada quién encontró la solución.

Construyo algo nuevo

1. **En equipos resuelvan lo que se pide.**

   a. Cinthia va a cumplir 17 años y su papá quiere hacerle una pizza para su cumpleaños. El número de personas que asistirán a la fiesta es 10 incluyendo a su papá y a Cinthia. La receta que le gustó más a su papá es para 15 personas, pero solamente quieren preparar para 10.

   - ¿Cuáles son las cantidades que se deben comprar de cada ingrediente para preparar la pizza para 10 personas?

   Receta de pizza casera para 15 personas:

   - $1\frac{3}{4}$ kg de harina
   - 20 g de levadura seca
   - 1 litro de agua
   - $1\frac{1}{4}$ barras de mantequilla
   - 15 g de sal
   - 15 g de azúcar
   - $\frac{1}{2}$ kg de jamón
   - $\frac{1}{4}$ kg de queso *mozzarella*
   - 100 ml de salsa para pizza

> **Respondan las siguientes preguntas:**

- ¿Para la pizza que se desea preparar se necesita más o menos cantidad de cada ingrediente? ______________________________
- ¿Cuál es la proporción que se requiere de cada ingrediente? ¿Se tiene que reducir o aumentar a la mitad, a un tercio o a otra proporción? ______________

El papá de Cinthia pidió ayuda a su esposa y a una de sus hermanas.

Su esposa le dijo que si la receta fuera para 8 personas y solo se quiere para 4, dividiera 8 entre 4 para saber que cada cantidad debe ser dividida entre el cociente, lo cual implicaría dividir entre $\frac{8}{4}$; por lo que, volviendo al problema original, si la receta es para 15 personas y solo se quiere para 10 entonces dividiera la cantidad que corresponde a las 15 personas entre 10, esto es, entre $\frac{15}{10}$ o $\frac{3}{2}$, ya simplificado, y que así obtendría la proporción deseada de cada ingrediente.

Su hermana le dijo que era sencillo, que solo planteara una regla de tres, indicando que si de un ingrediente se usaba tanto para 15 personas, cuánto se usaría para 10, lo cual implicará una multiplicación por $\frac{10}{15}$ o $\frac{2}{3}$, que es equivalente, por cada uno de los ingredientes y el resultado será la proporción que debe de utilizar para la pizza de 10 personas.

- Realicen los cálculos para obtener los resultados y poder ayudar al papá de Cinthia. Una vez que tengan el resultado, expliquen quién estaba en lo correcto y por qué.

____

____

____

b. Cinthia se dio cuenta de que su papá tiene dificultades para obtener la cantidad de ingredientes que debe utilizar para hacer la pizza.

Así que después de pensar que la receta es para 15 personas y solo se requiere para 10, llegó a la conclusión de que la fracción resultante del problema es $\frac{15}{10}$, pero al simplificar la fracción resultante de los datos del problema quedan $\frac{3}{2}$ y ésa es la fracción por la que, según el método de su mamá, hay que dividir; o según el método de su tía, hay que multiplicar cada uno de los ingredientes por $\frac{10}{15}$ o $\frac{2}{3}$, ya simplificada la fracción.

Diccionario

Fracción impropia
Fracción en la cual el numerador es más grande que el denominador. Un ejemplo es: $\frac{10}{4}$. Una fracción impropia se puede representar como una fracción mixta, por ejemplo: $\frac{10}{4}$ se puede representar como fracción mixta de la siguiente manera: $2\frac{1}{2}$.

Fracción propia
Fracción en la cual el numerador es menor que el denominador. Por ejemplo: $\frac{4}{5}$.

c. Completen la tabla indicando el resultado de dividir entre $\frac{3}{2}$ cada uno de los ingredientes.

- Escriban como **fracciones impropias** las que sean fracciones mixtas.
- Cinthia dijo que dividir entre $\frac{3}{2}$ es lo mismo que multiplicar por $\frac{2}{3}$.

> **En equipo discutan cómo se tendrá que operar $\frac{7}{4} \div \frac{3}{2}$ para que dé como resultado $\frac{14}{12}$.**

> **Observen que se cumple que: $\frac{7}{4} \div \frac{3}{2} = \frac{14}{12}$ porque $\frac{14}{12} \times \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$, ya que la división y la multiplicación son operaciones inversas.**

Receta original para 15 personas	División entre $\frac{3}{2}$	Nueva receta para 10 personas	División entre 1.5
$1\frac{3}{4}$ kg de harina	$\frac{7}{4} \div \frac{3}{2}$	$\frac{14}{12}$ o $\frac{7}{6}$ kg de harina	$\frac{7}{4} \div 1.5$
20 g de levadura seca			
$\frac{5}{6}$ l de agua			
$1\frac{1}{4}$ barras de mantequilla			
15 g de sal			
15 g de azúcar			
$\frac{1}{2}$ kg de jamón			
$\frac{1}{4}$ kg de queso *mozzarella*			
100 ml de salsa para pizza			

d. Completen el siguiente texto:

Cuando se dividen dos fracciones, el producto del numerador de la primera por el ________________ de la segunda, da el numerador del cociente; y el producto del denominador de la primera por el ________________ de la segunda, da el ________________ del cociente.

e. Elaboren en sus cuadernos una tabla como la anterior pero en lugar de dividir entre $\frac{3}{2}$ multipliquen por $\frac{2}{3}$.

> **Discutan al interior del equipo si el resultado es equivalente cuando se divide entre una fracción o se multiplica por su inversa.**

f. Resuelvan los siguientes ejercicios para comprobar:

- $10 \div \frac{2}{1} =$
- $10 \times \frac{1}{2} =$
- $160 \div \frac{8}{2} =$
- $160 \times \frac{2}{8} =$
- $\frac{36}{3} \div \frac{6}{2} =$
- $\frac{36}{3} \times \frac{2}{6} =$

> **De los dos procedimiento analicen cuál fue el correcto y por qué.**

g. Cinthia se dio cuenta de que $\frac{3}{2}$ equivale al número decimal 1.5, por lo que decide hacer ahora su tabla de ingredientes dividiendo cada cantidad entre 1.5 para comprobar que efectivamente sea lo mismo.

- ¿Qué se necesita para poder dividir $1\frac{3}{4} \div 1.5$?

> **Discutan con otros estudiantes qué procedimiento sería el más adecuado para solucionar este caso.**

> **Discutan con otros estudiantes por qué el resultado de la última columna es equivalente al de la segunda.**

Hagamos una reflexión

Para poder resolver el problema anterior tuviste que encontrar el factor de proporcionalidad que correspondía de acuerdo a la cantidad que se quería reducir la receta de la pizza de 15 a 10 personas; es decir, tomar 10 de 15, $\frac{10}{15}$, lo cual equivale a $\frac{2}{3}$. Por eso, uno de los procedimientos que utilizaste fue multiplicar cada ingrediente por $\frac{2}{3}$.

Por otro lado, multiplicar por $\frac{2}{3}$ es equivalente a dividir entre $\frac{3}{2}$ porque:

Dividir una cantidad entre un número es equivalente a multiplicar esa cantidad por el inverso multiplicativo de ese número.

El inverso multiplicativo o recíproco de un número **a** es aquel que al multiplicarlo por **a** da como resultado 1, por ejemplo: el inverso multiplicativo de 3 es $\frac{1}{3}$ porque $3 \times \frac{1}{3} = 1$.

De igual manera, el inverso multiplicativo o fracción recíproca de $\frac{6}{8}$ es $\frac{8}{6}$ porque $\frac{6}{8} \times \frac{8}{6} = 1$.

Para dividir fracciones, puedes usar el siguiente procedimiento:

- Multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor. El resultado es el numerador del cociente.
- Multiplica el denominador del dividendo por el numerador del divisor. El resultado es el denominador del cociente.

Por ejemplo, para dividir:

Fracción dividendo ↓ ↓ Fracción divisor

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = (1 \times 4) \div (1 \times 2)$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} = \frac{4}{2}$$

Las fracciones resultantes de una división se pueden simplificar si la fracción lo permite.

Para finalizar

1. En equipos realicen las operaciones y analicen sus resultados.

a. $\frac{1}{3} \times \frac{3}{1} =$ $\qquad$ $\frac{1}{2} \times \frac{2}{1} =$

- ¿Qué pasa cuando multiplican una fracción por su fracción recíproca? ____________

____

b. $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} =$

- Divide el producto entre $\frac{3}{4}$, ¿cuál es el resultado?

____

- Divide el producto entre $\frac{1}{2}$, ¿cuál es el resultado?

____

> En el grupo comenten cuál es la relación entre la multiplicación y la división.

2. Resuelvan en equipo lo que se indica.

a. El maestro de educación física está planeando una carrera de relevos en una pista que tiene $2\frac{1}{2}$ km y quiere que cada $\frac{1}{4}$ km haya un corredor.

- ¿Cómo podrá dividir la pista para ubicar a los corredores?

____

- ¿De cuántas formas diferentes podrá hacer el cálculo?

____

- ¿Cuántos corredores tendrá cada carrera?

____

- ¿Cómo puedes comprobar tu respuesta?

____

____

b. Inventen dos problemas que se resuelvan con una división de fracciones ya sean comunes, decimales o combinadas.

-

-

> Expongan ante el grupo sus resultados, conclusiones y problemas, y escuchen y hagan comentarios al respecto.

Trabaja con...

Usen el conocimiento que adquirieron en la sesión 1 y en equipos elaboren en una hoja electrónica de cálculo diferentes tablas que dividan fracciones en diferentes representaciones.

Usen sus tablas para comprobar la equivalencia de dividir números escritos en forma decimal o de fracción común. Y comprueben también que multiplicar por una fracción es lo equivalente a dividir entre su recíproca.

> En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.

> Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

3 Positivo o negativo: he allí el dilema

En esta sesión continuarás aprendiendo sobre fracciones, pero ahora aprenderás multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

Recuperamos lo aprendido

1. **En parejas solucionen el siguiente problema.**

El siguiente es el balance de depósitos y gastos de una semana de don Gastón a su tarjeta bancaria, con esta información contesten las preguntas. El saldo de don Gastón será la diferencia entre sus depósitos y sus gastos.

Diccionario

Saldo
Cantidad positiva o negativa que resulta de una cuenta (RAE). Se calcula sumando o restando una cantidad a una cantidad fija. Por ejemplo: $(+8)+(-4)+(+3)=1$

Día de la semana	Depósito	Gasto	Saldo
Lunes	$5 600	$350	
Martes		$1590	
Miércoles		$3 800	
Jueves	$1500	$2 000	
Viernes		$1 986	
Sábado		$500	
Domingo		$650	

- Escriban en la columna correspondiente el **saldo** por día.
- ¿Qué día de la semana don Gastón empezó a deber? ______
- ¿Cuánto es lo mínimo que debe depositar don Gastón para ya no tener saldo negativo? ______
- ¿Cómo resolvieron el problema? ______

______

> Compartan sus resultados y estrategias con otras parejas.

Construyo algo nuevo

Logo es un *software* de programación representado por una tortuga que avanza (av) o retrocede (re) el número de pasos que le indiquen (un número o una operación) y también puede girar a la izquierda (gi) o a la derecha (gd) un determinado número de grados. Las siguientes actividades pueden ser desarrolladas con lápiz y papel o pueden descargar el programa Logo totalmente gratis de la página: https://bit.ly/2lau0u6.

En el caso de que desarrollen las actividades con lápiz y papel anoten (av)+ para indicar que se avanza y (re)− para indicar que se retrocede.

Si descargaron el programa Logo, escriban en el área de comandos cada indicación y opriman la tecla *enter* para que observen cómo se mueve la tortuga. Originalmente, la tortuga se mueve hacia arriba o hacia abajo, si quieren que se mueva hacia la derecha o hacia la izquierda, empiecen con la instrucción *girar a la derecha 90°* (gd 90).

- Para conocer la posición de la tortuga hagan clic en *Estado*.
- Con el comando *centro*, la tortuga regresa al origen y con el comando *bp* (borrar pantalla) se limpia la pantalla.

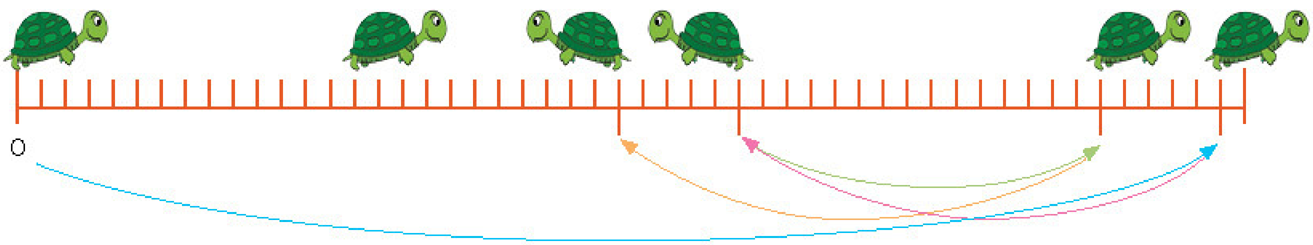
Se pueden apoyar también de una calculadora para resolver las operaciones tomando en cuenta que:

- Cuando escriban av marcar el signo +; por ejemplo: av(20) será +20
- Cuando escriban re marcar el signo −; por ejemplo: re(35) será −35
- Cuando aparezca el asterisco (*) indicará multiplicación
- Cuando aparezca la diagonal / indicará división
- Después de escribir una instrucción para la tortuga y antes de oprimir la tecla *enter*, estimen si la tortuga avanzará o retrocederá.

1. **Trabajen en equipo para leer y comprender cómo se mueve la tortuga. Indiquen el punto en que estará la tortuga después de seguir las instrucciones de la tabla.**

Instrucción	Acción	Ejemplo
Avanza	La tortuga se mueve hacia adelante 50 pasos	av(50)
Avanza	La tortuga se mueve hacia atrás 20 pasos	re(15+5)
Retrocede	La tortuga se mueve hacia adelante 15 pasos	av(3*5)
Retrocede	La tortuga se mueve hacia atrás 20 pasos	re(38−18)
La tortuga estará en el punto		

En su cuaderno, anoten las instrucciones para la tortuga indicando con el signo + las órdenes para avanzar (av) y con − las órdenes para retroceder (re).



2. **Obtengan la posición de la tortuga en cada una de las siguientes instrucciones, considerando que avanza (av) representa una operación de suma y retrocede (re) representa una operación de resta.**

	Instrucción	¿Cuánto avanza o retrocede?	Posición final
	centro	En el 0	0
1	av(50)	Avanza 50	50
2	re(20)		
3	av(−15+5)		
4	re(−20−15)		
5	re(25)		
6	av(4*2)		
7	av(5*−3)		
8	av(−4*5)		
9	av(−5*−6)		
10	av(40.2*0.8)		
11	av(50.5*−0.6)		
12	av(−17.1*0.9)		
13	av(−50.8*−6.6)		
14	av(8)		
15	re(8)		
16	av(−8)		
17	re(−8)		

a. En su cuaderno anoten las instrucciones para la tortuga indicando con el signo + las órdenes para avanzar (av) y con − las órdenes para retroceder (re).

b. Analicen la tabla anterior y escriban en su cuaderno en cuáles casos la tortuga hizo lo contrario a la indicación av o re.

- Si fuera necesario, programen otras indicaciones de av o re para que estén seguros de sus afirmaciones.

› Compartan sus resultados y estrategias con otros estudiantes.

3. **En equipo analicen las instrucciones que se le dieron a la tortuga.**

Observen que a partir de la instrucción 6, los desplazamientos son mediante multiplicaciones de números. Todos lo números tienen un caracter ya sea positivo (+) o negativo (−) y lo que se opera es al número con el signo que tiene aparejado y no solamente los signos.

a. La operación de la instrucción 6 es: av(4*2)

- ¿Cuál es el caracter o signo del 4 y cuál el del 2? ¿Qué signo tendrá aparejado el número del resultado de esta multiplicación? ____________

b. En la instrucción 7, la operación es: av(5*−3)

- De acuerdo con el resultado, ¿la tortuga avanzó o retrocedió? ____________
- ¿Cuál es el signo o caracter del 5 y cuál el del 3? ____________
- ¿Cómo representan 5x(−3) como una suma? ____________
- ¿Cuál es el resultado de multiplicar 5x−3; qué signo tiene aparejado el resultado?

____

Diccionario

Valor absoluto
Es el valor de un número y es positivo; por ejemplo, el valor absoluto de |−6| = |6| = 6; el valor absoluto de |14| = |−14| = 14; el valor absoluto de |−3| = |3| = 3. El valor absoluto de un número se representa entre barras paralelas |x|.

En equipo lleguen a una conclusión del signo o carácter que tendrá un número resultante del producto, al multiplicar:

- Un número positivo por otro número positivo
- Un número positivo por otro número negativo
- Un número negativo por otro número positivo
- Un número negativo por otro número negativo

4. **Obtengan nuevamente la posición de la tortuga en cada una de las siguientes instrucciones escribiendo la operación que representa cada desplazamiento. Pueden apoyarse del programa Logo o de una calculadora.**

	Instrucción	Operación que representa	¿Dónde está la tortuga?
	Centro		En el 0
1	av(70)	0 + 70	En el 70 o en el +70
2	re(15)	70 − 15	
3	av((−10)*(−4))		
4	re((−3)*(4))		
5	av((−7)*(−1))		
6	av((4)/(2))		
7	av((9)/(−3))		
8	av((−8)/(−4))		
9	av((−25)/(5))		
10	re(25/0.2)		
11	av((14.5)/(2.1))		
12	av((9.3)/(−3.4))		
13	av((−8.8)/(−4.4))		
14	av((−35.1)/(0.5))		

a. En su cuaderno anoten las instrucciones para la tortuga indicando con el signo + las órdenes para avanzar (av) y con − las órdenes para retroceder (re).

b. Analicen la tabla anterior y escriban en su cuaderno en cuáles casos la tortuga hizo lo contrario a la indicación av o re.

c. Las instrucciones del 6 al 9, involucran división, analicen los resultados obtenidos y lleguen a una conclusión del signo que tendrá el cociente de una división, al dividir:

- Un número positivo entre otro número positivo
- Un número positivo entre otro número negativo
- Un número negativo entre otro número positivo
- Un número negativo entre otro número negativo

- ¿En qué posición quedó la tortuga? ______________________________

> **Comparen sus respuestas y estrategias con las de otros equipos.**

Hagamos una reflexión

Las siguientes reglas que aplican en la multiplicación y en la división, son importantes y no deben olvidarlas.

Al multiplicar o dividir dos números enteros, se multiplican o dividen sus valores absolutos y el signo del resultado está dado de la siguiente manera:

- Si ambos números son positivos, el resultado será **positivo**.
- Si uno de los dos números a operar es negativo, el resultado será **negativo**.
- Si ambos números son negativos el resultado será **positivo**.

Si necesitan programen otras indicaciones de av o re con operaciones de multiplicación o división de números con caracter o signo positivo o negativo para confirmar las afirmaciones anteriores.

Diccionario

Acciones en la Bolsa
Documentos con valor relacionados con una marca o producto, los cuales pueden cambiar su valor dependiendo del buen o mal desempeño de dichas marcas o productos.

Balance
Análisis de pérdidas y ganancias para determinar si el saldo final es favorable o no.

Para finalizar

1. **En quipos resuelvan el siguiente problema.**

Entre cuatro personas compraron 2198 diferentes acciones en la Bolsa; las acciones adquiridas por empresa son las siguientes: 455 acciones de El cafetal, 820 acciones de La croqueta, 350 acciones de El garrafón, 523 acciones de El huevo de oro y 50 acciones de Moles molón. Quedaron en repartirse por partes iguales ganancias y pérdidas, y quieren ver el balance que han tenido en el presente mes.

Al finalizar el mes las acciones quedaron como sigue:

- El cafetal ganó \$3.25 por acción
- La croqueta ganó \$0.25 por acción
- El garrafón perdió \$1.40 por acción
- Moles molón perdió \$2.60 por acción
- El huevo de oro perdió \$0.80 por acción

- Indiquen el balance por acción.

- Indiquen el balance final.

- Indiquen cuánto ganó cada accionista.

- Indiquen cuánto perdió cada accionista.

2. **En su cuaderno, inventen dos problemas con las siguientes características.**

- Que implique multiplicación con al menos un número negativo.
- Que implique división con al menos un número negativo.
- Que implique multiplicación con al menos un número negativo fraccionario o decimal.
- Que implique división con al menos un número negativo fraccionario o decimal.

Trabaja con...

En equipos realicen lo siguiente.

En la sesión 1 trabajaron con la hoja electrónica de cálculo elaborando tablas como la siguiente:

C3 | fx =A3*B3

	A	B	C
1	Multiplicación de fracciones		
2	Número decimal 1	Número decimal 2	Producto
3			0.00
4			0.00
5			0.00
6			0.00
7			0.00
8			

Elaboren otras tablas que incluyan división y prueben las reglas de los signos para la multiplicación y para la división con números enteros, fraccionarios y decimales.

Comenten cómo hacer una serie de 6 a −6 usando el producto de dos números enteros, decimales o fracciones, y cómo usando el cociente. Por ejemplo, con multiplicación puede ser. −3 *−2 (6); +2.5*2 (5); −8*−0.5 (4), etcétera.

> En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.

> Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

4 Potencias y raíces

En esta sesión conocerás cómo representar y calcular potencias y raíz cuadrada.

Recuperamos lo aprendido

1. **En parejas contesten lo siguiente.**

- ¿Qué área cubrirá una loseta cuadrada que mide 32 cm por lado?
  ____
- ¿Cuánto medirá por lado una loseta cuadrada que cubre 1600 cm^2 de área?
  ____
- ¿Cuál de los dos tipos de loseta será mejor para cubrir un área cuadrada de 2 m por lado? ¿Por qué? _______________
  ____

> Comparen con otras parejas sus resultados y estrategias.

Construyo algo nuevo

1. **En equipos lean y contesten lo siguiente.**

Eduardo empaca chocolates en contenedores cuadrados que van desde 2 chocolates por lado hasta cuadrados donde caben 15 chocolates por lado.

- Un cliente le pidió un arreglo de chocolates que tuviera 6 chocolates por lado, ¿cuántos chocolates tendrá el arreglo? _______________
- Si el arreglo tuviera 11 chocolates por lado, ¿cuántos chocolates tendría? _______________
- ¿Es posible hacer un arreglo con 40 chocolates sin que sobren o falten espacios en el contenedor? ¿Cuántos chocolates tendría por lado? Expliquen por qué.
  ____
  ____
- ¿Cuáles son los arreglos más cercanos a 40 chocolates que podría hacer Eduardo?
  ____
- Eduardo envió un arreglo con 169 chocolates. ¿Cuántos chocolates tenía por lado?
  ____

> Comenten con otros equipos sus respuestas y estrategias.

2. En parejas analicen lo siguiente.

- Observen y completen la tabla siguiente con el número de chocolates que tiene por lado cada arreglo y el número total de chocolates:

Número de chocolates por lado	2	3		6		13	
Chocolates totales en el arreglo	4		16				

- Observen el número de chocolates por lado y elijan la operación que tendrían que hacer con ese número para obtener el número de chocolates totales:
  - Multiplicar el número de chocolates que hay en un lado por dos
  - Multiplicar el número de chocolates que hay en un lado por sí mismo
  - Multiplicar el número de chocolates que hay en un lado por su doble
- ¿Podrían tener un contenedor cuadrado con 30 chocolates y uno de 90 chocolates? ____________________
- Expliquen qué procedimiento usan para saber si se pueden o no obtener 30 o 90 chocolates. ____________________

> Compartan con otros equipos sus respuestas y estrategias.

3. En parejas resuelvan el siguiente problema.

Israel es diseñador gráfico y le acaban de pedir unos folletos para promocionar una empresa de croquetas para gatos. El cliente quiere que las hojas de los folletos sean cuadradas y tengan un área de 289 cm^2, por lo que Israel necesita determinar cuánto deben medir de lado las hojas.

- ¿Cuánto estiman que debe medir el lado de las hojas: 9 cm, 19 cm, 20 cm?

____

> Compartan con otras parejas sus respuestas y estrategias usadas.

Cuando multiplicas un número por sí mismo, lo elevas al cuadrado o a la segunda potencia, así: $7 \times 7 = 7^2 = 49$

- Analicen el cuadrado de algunos números que estimen puedan ser la respuesta al problema de Israel.

Lado de la hoja (cm)	Forma de calcular el área	Resultado (cm^2)
9		
19		
20		
—		289

- En la columna de resultados, ¿hay alguno que se acerque a la medida que se requiere? ___
- ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja que requiere Israel? ___
- Usen la siguiente tabla para calcular las dimensiones de la hoja si el cliente hubiera pedido la superficie de 299 cm^2.
- Si la respuesta no se encuentra exactamente en alguno de los números analizados, ¿entre cuáles números se puede encontrar la respuesta? ___

Lado de la hoja (cm)	Forma de calcular el área	Resultado (cm^2)

- Comenten qué hubieran hecho si el cliente hubiera pedido la superficie de la hoja de 299 cm^2. ___

> Compartan con otros equipos sus respuestas y estrategias.

Hagamos una reflexión

Para encontrar el número de chocolates del arreglo de 11 chocolates de lado, se multiplica $11 \times 11 = 121$.

Al multiplicar un número por sí mismo, se obtiene el cuadrado de ese número; se llama así porque es equivalente a calcular el área de un cuadrado, como en los arreglos de chocolates, cuyo lado está representado por un número de chocolates. Por ejemplo, el cuadrado del número 6 puede representar un arreglo de 6×6.

$$6 \times 6 = 36;\ 36 \text{ es el cuadrado de } 6$$

El cuadrado de un número se escribe de la siguiente manera:

$$15 \times 15 = 15^2$$
$$15^2 = 225$$

Se lee: "quince al cuadrado es igual a doscientos veinticinco" o "quince a la potencia dos es doscientos veinticinco".

Esta forma de escribir una expresión aritmética o un número se denomina **forma exponencial** donde, en este caso, el 15 es el número que se multiplica por sí mismo (**base**) y el 2 es el número de veces que se modifica (**potencia**).

15^2 Exponente
Base Potencia

Forma exponencial	Se lee	Significa
15^2	Quince a la segunda potencia o quince al cuadrado	$15 \times 15 = 225$

El resultado de elevar un número al cuadrado equivale al área del cuadrado cuyo lado es el número original. Por consiguiente, el lado del cuadrado corresponde a la raíz cuadrada de su área, ya que elevar un número al cuadrado y la raíz cuadrada son operaciones inversas y se escribe así:

$$15^2 = 225 \quad \text{y} \quad \sqrt{225} = 15$$

Para leerlo se dice: "La raíz cuadrada de doscientos veinticinco es igual a quince".

En este caso, y por el tipo de problema a solucionar, el resultado es 15; sin embargo, el cálculo de la raíz cuadrada involucra dos resultados, uno positivo y uno negativo:

$\sqrt{144} = 12$ porque $12^2 = 12 \times 12 = 144$, pero también se cumple que:
$\sqrt{144} = -12$ porque $-12^2 = -12 \times -12 = 144$

Cuando la raíz cuadrada de un número no es exacta, se puede ir acotando el número de decimales deseado, por ejemplo: calcular con decimales la raíz cuadrada de 46.

Número estimado	Cuadrado	Exactitud
6	36	Le falta
7	49	Se pasa
6.5	42.25	Le falta
6.8	46.24	Se pasa
6.7	44.89	Le falta

En este caso $\sqrt{46} = 6.7$ y -6.7 aproximado a un decimal.

Para finalizar

1. **Realiza lo que se pide a continuación.**

   a. En parejas determinen con 2 decimales la raíz cuadrada de 45.

   b. El cuadrado de un número es 12.96. ¿Cuál es el número? ________________

Trabaja con...

En equipos, elaboren una hoja electrónica de cálculo para elevar al cuadrado un número y para calcular su raíz cuadrada.

- ¿Qué fórmula anotaron en la columna B para elevar al cuadrado el número? ¿Por qué?
- Escriban 5 números con raíz cuadrada entera.
- ¿Entre qué números está el número cuya raíz cuadrada es 2.828?
- ¿Entre qué valores está la raíz cuadrada de 17?
- ¿Qué modificaciones harían en la hoja si quieren elevar un número a la tercera o cuarta potencia?

C2 =RAIZ(A2)

	A	B	C
1	Número	Elevado al cuadrado	Raíz cuadrada
2	1	1	1
3	2	4	1.414213562
4	3	9	1.732050808
5	4		
6	5		
7	6		
8	7		
9	8		
10	9		
11	10		

> En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.

> Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

5 El ajedrez

Recuperamos lo aprendido

1. **Trabajen en parejas para resolver los problemas.**

   a. Un cuarto tiene 22 losetas de 32 cm por lado por cada lado del cuarto.

   - ¿Cuántas losetas tiene en total el cuarto? ______________________
   - ¿Qué área cubren las losetas? ______________________

   b. Otro cuarto cuadrado de 16 m^2 de área está cubierto con 100 losetas.

   - ¿Cuántas losetas tiene por lado el cuarto? ______________________
   - ¿Cuánto mide por lado cada loseta? ______________________

Construyo algo nuevo

1. **En parejas y luego en equipo, resuelvan la actividad.**

   a. En parejas lean y contesten.

   Cuenta una leyenda que en la India un hombre llamado Sissa inventó el ajedrez para atenuar la pena del rey Sheram que había perdido a un hijo en batalla. El rey quedó tan maravillado con el juego, que le ofreció a Sissa pedir lo que quisiera, pero Sissa no quería nada a cambio, sin embargo el rey insistió tanto que Sissa le pidió que le diera un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta y así sucesivamente hasta llegar a la casilla número 64.

   Consultado y recuperado en https://bit.ly/2HzBGmk

   - Estimen cuántos granos de trigo habría que entregarle a Sissa:

     - Entre 1000 y 10 000 granos de trigo
     - Entre 10 001 y 100 000 granos de trigo
     - Entre 100 001 y 1000 000 granos de trigo
     - Entre 1000 001 y 10 000 000 granos de trigo
     - Más de 10 000 000 granos de trigo

> Comenten con otras parejas su resultado y su estrategia.

Hagamos una reflexión

Un número (excepto el cero) elevado a la cero potencia es igual a 1 porque: $a^n/a^n = a^{n-n} = a^0 = 1$, y un número elevado a la potencia es igual al mismo número $a^1 = a$.

> Si tienen alguna duda al respecto, consulten con su maestro o maestra.

b. En equipos analicen la leyenda del ajedrez tomando en cuenta que los granos de trigo por cada casilla se pueden representar con una potencia.

Casilla	1	2	3	4	5	6
Potencia	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
Granos	1					

- Terminen de llenar la tabla y comprueben que efectivamente corresponde el resultado a los números de granos de trigo por casilla.
- Pero además había que sumar los granos de cada casilla; con el ejemplo hasta el número 6 se tiene que:

  $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 1 + 2 + 4 +$ _____ + _____ + _____ = __________

- ¿Cómo representan con una potencia, cuántos granos de trigo corresponden a la casilla 10? ______________ ¿Cuántos son? ______________

  ¿Y cuántos corresponden a la casilla 20? ______________

Los granos de trigo correspondientes a la casilla 64 se representan como 263, lo cual quiere decir: multiplicar el 2 tantas veces como 63 para encontrar el número de granos correspondientes a la última casilla.

> **Después de esto, regresen a la lectura de la leyenda del ajedrez y estimen nuevamente su respuesta.**

> **Comenten con otros equipos sus respuestas y comentarios.**

2. En equipos resuelvan lo siguiente.

Gerardo encontró el siguiente acertijo matemático:

- Piensa un número cualquiera.
- Multiplícalo por el triple del número que pensaste
- Multiplícalo por el cuadrado del número que pensaste
- Divídelo todo entre el número que pensaste multiplicado por sí mismo cuatro veces (elevado a la cuarta potencia)
- Réstale tres
- Te queda cero.

- Pruébenlo con 2 números enteros diferentes y escriban en su cuaderno las operaciones que indica cada paso.
- Analicen el acertijo y comenten por qué da como resultado cero.

> **Comenten con otros equipos sus respuestas y estrategias.**

Hagamos una reflexión

En el momento de resolver operaciones, considera que en **expresiones fraccionarias se pueden cancelar factores para simplificarlas**, por ejemplo:

$$\frac{\cancel{6}\times\cancel{6}\times\cancel{6}\times 6\times 6}{\cancel{6}\times\cancel{6}\times\cancel{6}} = 6\times 6 = 6^2$$

Esto es posible ya que al tener de numerador y denominador el mismo número (en este caso 6) formarás unos de tal manera que al multiplicar por lo demás se anulan.

$$\left(\frac{6}{6}\right)\times\left(\frac{6}{6}\right)\times\left(\frac{6}{6}\right)\times 6\times 6 = 1\times 1\times 1\times 6\times 6 = 6^2$$

Hagamos una reflexión

Lean en parejas.

En la resolución de los problemas, han escrito operaciones como ésta:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 =$$

Este tipo de expresiones donde un número se multiplica por sí mismo, pueden también escribirse de la siguiente manera:

$$12 \times 12 = 12^2$$
$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

En la lección anterior aprendieron que esta forma de escribir una expresión aritmética o un número se denomina **forma exponencial** donde, en este caso, el 4 es el número que se multiplica por sí mismo (**base**) y el 5 es el número de veces que se modifica (**exponente**).

$$\mathbf{4^5}$$

Base Exponente

Y se lee: cuatro a la quinta potencia.

Una potencia significa multiplicar la base por sí mismo el número de veces que indica el exponente.

¿Cómo se escribe $8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$ en forma exponencial? ________________

Ahora analicen con cuidado los siguientes casos:

La potencia cero de cualquier número (excepto el cero) es igual a 1, por ejemplo:

$4^0 = 1$ $-5^0 = 1$ $23^0 = 1$ $n^0 = 1$

La primera potencia de cualquier número es igual al mismo número, por ejemplo:

$23^1 = 23$ $-5^1 = -5$ $n^1 = n$

Analicen el producto de potencias con la misma base.

$3^2 \times 3^3 = 9 \times 27 = 243$, pero si se desarrollan las potencias, es posible observar la forma en que se pueden operar al representarlas nuevamente como potencia:

$$3^2 \times 3^3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = 3^5 = 243$$

3. En parejas, realicen lo siguiente.

- Escriban como producto desarrollado las siguientes potencias:

32 = ______ × ______ 33 = ______ × ______ × ______

- Ahora escriban como producto desarrollado:

32 × 33 = ______ × ______ × ______ × ______ × ______

- Finalmente expresen como potencia el producto que desarrollaron:

32 × 33 = ______ × ______ × ______ × ______ × ______ = ______

Escriban en su cuaderno cómo se operan los exponentes cuando hay un producto de potencias con la misma base.

4. Resuelvan en parejas los siguientes ejercicios.

a. Desarrollen los siguientes productos de potencias con la misma base y después represéntenlas como potencia.

- $2^3 \times 2^4 \times 2^2 =$ ______________________________ = ________
- $7^2 \times 7^3 \times 7^2 \times 7^1 =$ ______________________________ = ________
- $m^5 \times m^3 \times m^2 \times m^1 =$ ______________________________ = ________

b. ¿Cómo pueden comprobar que...?:

$3^2 \times 3^3 = 3^5$
$2^3 \times 2^4 \times 2^2 = 2^9$
$5^6 \times 5^3 \times 5^2 \times 5^5 = 5^{16}$

- Con base en lo anterior escriban cómo se opera con los exponentes cuando se multiplican dos potencias con la misma base: ______________________________

c. Simplifiquen factores y escriban el resultado de las operaciones.

- $\frac{6^5}{6^2} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}{6 \times 6} =$
- $\frac{9^8}{9^3} =$
- $\frac{10^7}{10^2} =$
- ¿Cómo se operan los exponentes cuando se dividen potencias de la misma base? ______________________________

d. Escriban el resultado como una potencia, utilizando la misma base que las potencias que dividen.

- $\frac{5^{15}}{5^8} =$
- $\frac{a^6}{a^4} =$

e. Observen y analicen cómo se operan potencias de potencias.

- $(8^2)^4 = (8 \times 8) \times (8 \times 8) \times (8 \times 8) \times (8 \times 8) = 8^8$
- $(6^3)^5 = (6 \times 6 \times 6) \times (6 \times 6 \times 6) \times (6 \times 6 \times 6) \times (6 \times 6 \times 6) \times (6 \times 6 \times 6) = 6^{15}$
- ¿Cómo se operan los exponentes cuando una potencia se eleva a una potencia?

____

f. Expresen como potencia el resultado de las siguientes potencias de potencias.

- $(10^5)^4 =$
- $(9^2)^5 =$
- $(x^3)^3 =$

Diccionario

Recíproco de un número
Es el inverso multiplicativo de un número. Cuando un número y su recíproco se multiplican, el resultado es 1. Por ejemplo, el recíproco de 4 es $\frac{1}{4}$, porque cuando se multiplican, el resultado es 1: $\frac{4}{1} \times \frac{1}{4} = 1$.

Hagamos una reflexión

Se puede generalizar que:

Operación	
Producto de potencias	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
Cociente de potencias	$a^m \div a^n = a^{m-n}$
Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{m \times n}$

Con a diferente a un valor cero y m, n enteros positivos.

Para finalizar

7. En parejas resuelvan los ejercicios y expresen los resultados como potencias.

- $6^8 \times 6^3 =$
- $2^{10} \times 2^4 \times 2^2 =$
- $85^6 \times 85^3 \times 85^9 \times 85^5 =$
- $12^4 \div 12^3 =$
- $4^7 \div 4^4 =$
- $27^9 \div 27^5 =$
- $(30^5)^9 =$
- $(89^2)^{15} =$
- $(x^3)^{10} =$

> Comparen sus resultados y estrategias con los de otras parejas.

Trabaja con...

En parejas lean y resuelvan el ejercicio.

La notación científica es un modo conciso de anotar números mediante potencias de diez, esta notación es utilizada en números demasiado grandes o demasiado pequeños.

Por ejemplo, una micra en notación científica se escribe así: 1×10^{-6} m (es la millonésima parte de un metro); un gigabyte en notación científica se escribe así: 1×10^9 bytes.

La longitud de una bacteria es aproximadamente 5×10^{-7} m.

- ¿Cuál es el exponente del número 5 en esta cantidad?, ¿qué signo tiene?

____

- ¿Cuál es el exponente del número 10 en esta cantidad?, ¿qué signo tiene?

____

- ¿10^{-7} se puede representar como $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$? __________ ¿Por qué?

____

Para poder comprender lo que representa un número entero elevado a una potencia negativa, realicen la siguiente actividad con ayuda de una calculadora científica.

En caso de que no cuenten con calculadora científica o no puedan entrar al sitio que se indica, pidan a su docente que les explique paso a paso cómo resolver la actividad sin calculadora.

Entren al sitio https://bit.ly/2EXqjQI

Busquen la tecla X^y o en otras calculadoras X^n.

Marquen 10, luego la tecla X^y, después -1 y finalmente la tecla =

- ¿Cuál de los siguientes resultados se obtiene?

  10

  0.1

- ¿Cómo se escribe el 0.1 en forma de fracción?

  ____

- Calculen el cociente $\frac{1}{10}$:

  ____

- Escriban en la calculadora científica 10^{-3} y obtengan el resultado:

  ____

- Escríbanlo en forma de fracción y hagan la operación:

  ____

¿Es equivalente a 10^{-3}?

10^{-3} y $\frac{1}{1000}$ son expresiones equivalentes:

$$10^{-3} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3}$$

Un número entero elevado a un exponente negativo, es igual al recíproco o inverso del número elevado al exponente positivo:

$$X^{-n} = \frac{1}{X^n}$$

Expresen las siguientes potencias con exponente negativo en otras potencias equivalentes pero con exponente positivo.

a. 8^{-2} = **b.** 7^{-4} =

En la calculadora comprueben lo anterior con los siguientes números:

c. 4^{-3} = $\frac{1}{4^3}$ =

d. 5^{-2} = $\frac{1}{5^3}$ =

> En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.

> Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

6 Resuelve problemas de reparto proporcional

En primer grado aprendiste a resolver problemas de proporcionalidad directa y a encontrar valores faltantes por varios procedimientos. En esta secuencia utilizarás lo anterior para distribuir el total de una cantidad de acuerdo con los valores de otra.

Recuperamos lo aprendido

1. **Lee con atención y resuelve el problema.**

Úrsula tiene invitados a cenar mañana y les va a preparar una crema de jitomate. De acuerdo con su receta, si utiliza seis jitomates la crema alcanza para cuatro personas.

Úrsula todavía no sabe el número preciso de personas que cenarán; pueden ser 12 o 16 personas.

- ¿Cuántos jitomates necesitaría Úrsula para preparar esas porciones? ______
- ¿Cuántos jitomates se requieren por persona, según la receta de Úrsula?

______
- ¿Cómo obtuviste las diferentes cantidades de jitomates requeridos?

______

Construyo algo nuevo

Identificar situaciones de proporcionalidad directa

1. **Observa las siguientes tablas; indica si la relación entre las cantidades es de proporcionalidad directa.**

Número de entradas al cine	2	4	5	10
Costo de las entradas al cine ($)	150	300	375	750

Diámetro de la pizza (cm)	20	30	40	60
Cantidad de masa utilizada (g)	80	180	320	720

- ¿Cuál es el precio de una entrada al cine? ______
- El precio de una entrada al cine, ¿es igual o es diferente si compras 4 o 5 entradas?

______

- Al multiplicar un número de entradas por un factor, ¿cómo cambia el costo de las entradas? ______________________________
- ¿La relación entre el número de entradas y su costo es de proporcionalidad directa? Explica por qué. ______________________________
____
- Si vas a hacer una pizza de 20 centímetros de diámetro, ¿cuántos gramos de masa se necesitan por cada centímetro de diámetro de esta pizza? ______________
- Si la pizza que vas a hacer es del doble de diámetro, de 40 centímetros, ¿cuántos gramos de masa se necesitan ahora por cada centímetro de diámetro de esta nueva pizza? ______________________________
- Al multiplicar el diámetro de la pizza por un factor, ¿cómo se modifican los gramos necesarios para elaborarla?, ¿se multiplican por el mismo factor? ______________
____
- ¿La relación entre el diámetro de una pizza y la cantidad de masa que se necesita para elaborarla es de proporcionalidad directa? Explica tu respuesta. ______________
____
____

Hagamos una reflexión

Una relación entre dos conjuntos de cantidades es de **proporcionalidad directa**, si los factores internos que se corresponden son iguales. Por ejemplo,

Manzanas (kg)	Costo ($)
2	80
3	120
6	240
8	320

$\times \frac{3}{2}$ $\quad$ $\times \frac{3}{2}$

$\times 2$ $\quad$ $\times 2$

$\times \frac{4}{3}$ $\quad$ $\times \frac{4}{3}$

$\times 40$

En una relación de proporcionalidad directa, cuando en uno de los conjuntos de cantidades el valor es 1, entonces el valor que le corresponde en el otro conjunto es el **valor unitario**. Por ejemplo, en el caso de las manzanas, el valor unitario es el precio de 40 pesos por un kilogramo de manzanas.

Otra propiedad de las relaciones de proporcionalidad directa, es la de razones externas o constante de proporcionalidad; esta se presenta en el apartado siguiente.

2. **Resuelvan lo siguiente por parejas.**

En una empresa de construcción han excavado varias zanjas —de las mismas dimensiones y en terrenos de características similares— utilizando diferentes números de máquinas excavadoras:

Longitud excavada (metros)	36	90	126
Número de máquinas excavadoras utilizadas	2	5	7

- Al duplicar el número de máquinas o multiplicarlo por 5, ¿cómo cambia la longitud de las zanjas excavadas?, ¿se multiplica por el mismo factor o por otro diferente? ____________________
- ¿La relación entre el número de máquinas y la longitud de las excavaciones es de proporcionalidad directa? Expliquen su respuesta. ____________________

La constante de proporcionalidad en problemas de valores faltantes

1. **Resuelvan en equipo el siguiente problema.**

Zacarías y Virginia construyeron un robot que recorre 100 metros en 20 segundos. Quieren saber qué distancias cubrirá el robot —a esa misma velocidad— en un minuto y medio, en 10 segundos y en 2 segundos. Completen la siguiente tabla:

Tiempo de recorrido (segundos)	20	60	90	10	2
Distancia recorrida (metros)	100	300			

- ¿Cuál es la velocidad a la que se mueve el robot? Explica cómo la obtienes. ____________________
- Si conoces el tiempo de un recorrido del robot, ¿cómo puedes obtener la distancia que ha cubierto en ese tiempo? Explica. ____________________
- ¿Cómo obtuviste las distancias que faltan en la tabla? Explica. ____________________
- ¿La distancia recorrida por el robot es directamente proporcional al tiempo de ese recorrido? Explica por qué. ____________________

Hagamos una reflexión

En una situación de proporcionalidad directa, el cociente de dos cantidades relacionadas es siempre el mismo, y se llama **constante de proporcionalidad o razón externa**. Por ejemplo, en una tienda ofrecen toda su mercancía con un descuento:

Precio con descuento ($)	450	945	1425	2625
Precio original ($)	600	1260	1900	3500

- ¿Se trata de una relación de proporcionalidad? ¿Cómo lo determinan? ____________
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? Expliquen cómo la obtuvieron. ____________

La constante de proporcionalidad nos permite obtener valores desconocidos o faltantes de una cantidad, si se conoce el valor correspondiente de la otra cantidad. Por ejemplo, si el precio original de un artículo en la tienda anterior, es de $2 400.

- ¿Cuál será su precio con descuento? Expliquen su procedimiento. ____________

2. Resuelvan y contesten las siguientes preguntas.

En la escuela, a 4 de cada 10 alumnos les gusta el basquetbol. Si en el grupo de segundo A hay 12 alumnos que son aficionados a este deporte, ¿cuántos alumnos hay en total en ese grupo?

- ¿Cómo obtuvieron la respuesta? ____________
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ____________

Distribuir el total de una cantidad, de acuerdo con los valores de otra cantidad

1. Resuelvan en equipo el siguiente problema.

En la escuela se llevó a cabo una kermés. Entre tres amigos pusieron un puesto de tostadas y compraron en conjunto los ingredientes necesarios. Alejo puso $250, Bárbara $500 y Cecilia aportó $750.

Por la venta de sus tostadas, tuvieron una ganancia de $2 250; acordaron repartirla de manera proporcional a lo que aportó cada quien para comprar los ingredientes. ¿Cuánto de la ganancia obtenida le corresponde a cada uno de los amigos?

	Total	Alejo	Bárbara	Cecilia
Aportaciones ($)	1 500	250	500	750
Ganancias ($)	2 250			

- ¿Las cantidades están en proporción directa? ¿Por qué? ____________
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ____________
- ¿Cuál fue la ganancia de los tres amigos por cada peso que aportaron? ____________

> **Expliquen a otro equipo cómo resolvieron el problema.**

Hagamos una reflexión

Si dos cantidades son directamente proporcionales, y se tiene que repartir el total de una de ellas tomando en cuenta los valores de la otra cantidad, la situación es de reparto proporcional, y se dice que la primera cantidad se reparte proporcionalmente a la segunda. Para distribuir el total es necesario:

- comprobar que las cantidades sean directamente proporcionales, y
- aplicar algún procedimiento que ya se conoce para encontrar valores faltantes.

Por ejemplo: Isidro y Mauro son albañiles; levantaron una barda de 30 m². Isidro levantó 20 m² mientras que Mauro completó los 10 m² restantes. Si se reparten lo que les pagaron ($2100) de manera proporcional a los metros cuadrados que cada quien levantó, ¿cuánto le toca a cada uno?

Superficie de barda (m²)	30	20	10
Pago recibido ($)	2100		

Como Isidro construyó el doble de metros cuadrados que Mauro, deberá recibir el doble de pago; por esto, las superficies levantadas y los pagos son directamente proporcionales.

La constante de proporcionalidad es de $\frac{2100}{30} = 70$ pesos por m²

a partir de la cual se obtienen las partes del pago: $70 \times 20 = \$1\,400$ para Isidro y $700 para Mauro.

En este caso, los 70 pesos también representan el valor unitario, es decir, el pago recibido por 1 m²; vemos que por dos procedimientos diferentes se llega al mismo resultado. Para completar la comprobación del resultado en una situación de reparto proporcional, verifica que la suma de las partes sea igual al total que se deseaba distribuir:

parte de Isidro + parte de Mauro = ____________________

2. **Resuelvan en su cuaderno lo siguiente y contesten las preguntas correspondientes.**

Entre tres campesinos le vendieron 12 sacos de café a una empresa. El primero de ellos contribuyó con 8 sacos, el segundo con 3 de ellos y el tercero solo con uno. Les pagaron $4 800 en total.

- ¿Cuánto dinero le corresponde a cada campesino según los sacos que aportó?
- ¿Cuáles son la constante de proporcionalidad y el valor unitario?
- Expliquen cómo resolvieron el problema y qué procedimiento utilizaron.

Para finalizar

1. **Retoma el problema de la actividad inicial de la secuencia y resuelve.**

En relación con la situación de la crema de jitomate, encuentra los valores que se indican en la tabla; recuerda que se requieren 6 jitomates por cada 4 personas.

Número de personas	2	1	4	8	10	15	20
Número de jitomates necesario para elaborar la sopa							

2. **En parejas resuelvan en su cuaderno los problemas siguientes, utilizando lo que aprendieron en esta secuencia.**

a. Las tablas siguientes contienen los datos de pruebas de velocidad de dos autos:

Automóvil 1

Tiempo de viaje (horas)	2.5	4	6.75	8
Distancia recorrida (km)	200	320	540	640

Automóvil 2

Tiempo de viaje (horas)	1.5	3	4.5	12
Distancia recorrida (km)	75	150	225	620

- ¿Cuál de los dos autos viajó siempre a la misma velocidad?
- ¿En qué auto la distancia y el tiempo son directamente proporcionales?

b. Irene y Ezequiel pintaron el interior de una casa, con un total de 80 m^2. Quieren repartirse los \$6 000 que cobraron de acuerdo con la superficie que pintó cada quién. Si Irene pintó 30 m^2, ¿cuánto le corresponde a cada quién?

c. Lorenzo, Patricia y Soledad fueron a un restaurante y van a pagar la cuenta según el número de miembros de la familia de cada quien, incluidos ellos mismos. El total a pagar es de \$5 040. Las familias son de 5, 6 y 7 personas respectivamente. ¿Cuánto le toca pagar a cada uno de los tres amigos?

Antes de pagar llega otro amigo, Goyo, que viene solo, y la cuenta sube a \$5 130. Si también ahora se distribuye la cuenta según el número de personas, ¿cuánto pagará cada quién?

> Comprueben los resultados de los problemas de la kermés, los sacos de café y los incisos *a* y *b* anteriores.

d. En equipos de tres alumnos, diseñen un problema de reparto proporcional. Resuélvanlo con al menos dos procedimientos diferentes. Propónganlo a otro equipo y resuelvan sus dudas.

Trabaja con...

Trabajen en parejas. En una hoja de cálculo resuelvan un problema de reparto proporcional; utilicen datos diferentes para distribuir un total en al menos ocho partes. Introduzcan las siguientes fórmulas:

- en la celda G3: =D4/C4
- en la celda D5: =$G$3*C5; copien esta fórmula en las celdas de la columna C hasta la celda que corresponda a la última parte en que se va a repartir el total
- en la celda D13: =SUMA(D5:D12)

Expliquen el significado de las fórmulas anteriores en relación con la situación de reparto proporcional.

> Comenten en plenaria y con su profesor.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3						Constante de proporcionalidad=	
4		TOTAL	920	23000			
5		Parte 1	10				
6		Parte 2	30				
7		Parte 3	50				
8		Parte 4	80				
9		Parte 5	100				
10		Parte 6	150				
11		Parte 7	200				
12		Parte 8	300				
13		Comprobación					
14							
15							
16							

7 Resuelve problemas de proporcionalidad inversa

En la secuencia anterior resolviste problemas de reparto proporcional utilizando los procedimientos que se aplican en situaciones de proporcionalidad directa. Ahora estudiarás situaciones de proporcionalidad inversa.

En esta secuencia identificarás otro tipo de relaciones entre dos conjuntos de cantidades, las de proporcionalidad inversa, utilizando tablas de variación.

Recuperamos lo aprendido

1. **Contesten lo siguiente por parejas.**

- Una porción de tres galletas de avena contiene 123 calorías. ¿Cuántas calorías consume Rosario al comerse seis galletas? ______
- Entre Félix y Viviana se comieron ocho galletas de avena. ¿Cuántas calorías habrán ingerido ellos? ______
- ¿Cuántas calorías contiene una galleta? ______

2. **Respondan y comenten en plenaria. Justifiquen sus respuestas.**

- ¿La relación entre las cantidades es de proporcionalidad directa? ______
- Si lo es, ¿cuáles son la constante de proporcionalidad y el valor unitario? ______

Construyo algo nuevo

Reconocer situaciones de proporcionalidad inversa

1. **Por equipos de tres, contesten lo siguiente.**

Dos pintores tardan 50 horas en pintar entre los dos el exterior de un edificio.

- Si se encarga el mismo trabajo a cuatro pintores en lugar de dos, es decir, al doble de pintores ¿tardarían más tiempo o menos? ¿Por qué? ______
- ¿En cuánto tiempo terminarían de pintar el exterior de ese edificio? ______
- ¿Cuánto tardaría un pintor en llevar a cabo el mismo trabajo? ______

- ¿Qué sucede con el tiempo si solo la mitad de los pintores intervienen? Expliquen.

- Completen la tabla siguiente para encontrar en cuánto tiempo pintarían esa parte del edificio distinto número de pintores:

Número de pintores	Horas que tardan en pintar el exterior del edificio
2	50
4	
5	
10	
1	

- ¿Cómo es la relación entre las cantidades?
- Cuando el valor de una de las cantidades aumenta, ¿qué sucede con el valor de la otra, cómo cambia?
- Si el valor de una de las cantidades se multiplica por un factor, ¿cómo varía el valor de la otra cantidad? Expliquen.

Hagamos una reflexión

Dos conjuntos de cantidades son **inversamente proporcionales** si al aumentar el valor de una cantidad al doble la otra disminuye a la mitad; al aumentar al triple la otra disminuye a la tercera parte y así sucesivamente; es decir, cuando se multiplica un valor de una de ellas por un factor, el valor correspondiente de la otra cantidad se divide por el mismo factor.

Por ejemplo, en el problema anterior, el número de pintores que participan y las horas que tardan en terminar el trabajo, son cantidades cuya relación es inversamente proporcional.

2. Resuelvan el siguiente problema.

Don Basilio tiene varios árboles de aguacate en su jardín. Cuando es la época en que los frutos maduran, tiene que cortar muchos en poco tiempo, y los reparte entre las familias de sus amigos y parientes.

Acaba de terminar el corte del fin de semana y quiere repartirlos por partes iguales.

- Si les da frutos a todos sus vecinos, que son 8, les tocarían 21 aguacates a cada quien. ¿Cuántos les tocarían a sus vecinos inmediatos, que son solo 4?

Por otra parte, si considera únicamente a sus parientes que viven en la ciudad, serían seis familias. Y si quisiera agregar a los parientes que habitan en otras ciudades, sumarían 12 familias.

Elaboren en su cuaderno una tabla donde muestren los números de aguacates que les corresponderían a los diferentes números de familias. Contesten lo siguiente:

- ¿Qué sucede con el número de aguacates que le corresponde a las familias, si se triplican las familias? ______
- Describan cómo cambia el número de aguacates al aumentar o disminuir el número de familias. ______
______
- ¿Cuáles son las cantidades que se relacionan entre sí? ¿La situación es de proporcionalidad inversa? Expliquen. ______
______

Comparación entre proporcionalidad directa e inversa

1. Por equipos, contesten lo siguiente.

Observen las tablas siguientes. En la primera se muestran los posibles tiempos y velocidades al efectuar un viaje entre Campeche y Chetumal, mientras que la segunda contiene los costos de diferentes números de entradas al cine.

Tiempo de viaje (horas)	Velocidad de viaje $\left(\frac{km}{hora}\right)$	Tiempo × velocidad (km)
6	70	
12	35	
5	84	
10	42	

Número de entradas al cine	Costo de las entradas al cine ($)	$\frac{\text{Costo de entradas (\$)}}{\text{Número de entradas}}$
2	150	
4	300	
5	375	
10	750	

- En la primera tabla, ¿cómo varía la velocidad al cambiar el tiempo de viaje? Si el viaje se hace a más velocidad, ¿el tiempo de viaje aumenta o disminuye? ______
- Si el tiempo para el viaje se multiplica por un factor, ¿cómo varía la velocidad?
______
- Completen la primera tabla calculando el producto de cada tiempo por su correspondiente velocidad. ¿Cómo son los productos obtenidos: iguales o diferentes? ¿Por qué? ______
______

- En la segunda tabla, ¿cómo varía el costo total de las entradas al cine al cambiar el número de entradas compradas? Si se compran más entradas, ¿el costo o pago por las entradas aumenta o disminuye? ______
- Si el número de entradas se multiplica por un factor, ¿cómo varía el costo de ellas? ______
- Completen la segunda tabla calculando el cociente de cada costo entre su correspondiente número de entradas. ¿Cómo son los cocientes obtenidos: iguales o diferentes? ¿Por qué? ______
- Observen y comparen las dos situaciones representadas en las tablas anteriores. ¿Qué diferencias encuentran entre ellas y cómo se pueden explicar? ______

> **Compartan sus observaciones de ambas situaciones, comenten en el grupo.**

Hagamos una reflexión

En una relación de proporcionalidad directa, los factores internos son iguales; es decir, el cociente entre dos valores de la misma cantidad es igual al cociente entre los valores correspondientes de la otra cantidad; por ejemplo, si queremos comprar el doble de cinco entradas, hay que multiplicar por dos el costo de cinco entradas.

En una relación entre cantidades en proporcionalidad inversa, cuando se duplica el valor de una cantidad, el valor de la otra disminuye a la mitad; por ejemplo, si queremos viajar al doble de 42 kilómetros por hora, el tiempo de viaje se reduce a la mitad, de 10 a 5 horas.

En una situación de proporcionalidad directa, el cociente de valores correspondientes de las dos cantidades es siempre el mismo y se le llama **constante de proporcionalidad**. Por ejemplo, el cociente de $300 entre las cuatro entradas que se compran, arroja el valor de $75, que es la constante de proporcionalidad; ese mismo cociente se obtiene al dividir cualquier par de valores.

En una situación de proporcionalidad inversa, el producto de valores correspondientes de las dos cantidades permanece constante. En estas situaciones, dicho producto se conoce como la **constante de proporcionalidad inversa**. Por ejemplo, si se viaja durante seis horas a una velocidad de 70 kilómetros por hora, se cubrirá una distancia de 420 kilómetros, que es la que separa a las dos ciudades mencionadas. Y ese mismo producto —de 420 kilómetros— es lo que se obtiene al multiplicar cualquier par de valores correspondientes.

2. Observen las tablas a continuación y contesten.

En la tabla de la izquierda se muestran diferentes periodos en los que ha trabajado Ana y los pagos que ha recibido en cada uno de ellos. En la derecha se presentan las porciones de pastel que va a servir Paulina, según el número de invitados que lleguen a su fiesta de cumpleaños:

Pagos recibidos por Ana

Tiempo de trabajo (horas)	Pago recibido por el trabajo ($)
7	1400
14	2800
21	4200
28	5600

Porciones del pastel de Paulina

Número de personas	Porción de pastel (g)
10	240
12	200
15	160
20	120

- Obtengan los factores internos en los datos de la primera tabla. ¿Cómo varían los pagos recibidos al cambiar los días trabajados por Ana? ____________________
- Calculen los factores internos en la tabla sobre la repartición del pastel. ¿Cómo varía el tamaño de las rebanadas o porciones al cambiar el número de personas que asisten al festejo? ____________________
- Obtengan los productos de valores correspondientes, para las cantidades en ambas tablas. ¿Cómo varían estos productos? ¿Varían de la misma manera en las dos tablas? Expliquen. ____________________
- ¿En cuál de las dos situaciones la relación entre las cantidades es de proporcionalidad directa? ¿En cuál de ellas es de proporcionalidad inversa? Justifiquen su respuesta. ____________________
- Calculen las constantes de proporcionalidad de ambas situaciones. ____________________
- ¿Cuánto pesa en total el pastel de Paulina? ¿Qué representa en esa situación? ____________________

> **Comenten en plenaria sus observaciones sobre esta actividad.**

Encontrar valores faltantes en situaciones de proporcionalidad inversa

1. **En parejas, resuelvan los siguientes problemas.**

   a. La tía Florencia preparó mermelada de tejocote. Con la cantidad que tiene, puede llenar 24 frascos de 250 g cada uno. Pero también cuenta con frascos de otros tamaños, y quiere saber cuántos ocuparía de cada uno para guardar toda su mermelada. Completen la siguiente tabla:

Tamaño del frasco (g)	150	250	300	500	1000
Número de frascos necesarios		24			

- La relación entre tamaño y número de frascos, ¿es de proporcionalidad inversa? Expliquen su respuesta. ____________________

- ¿Cuánto es el total de mermelada que preparó doña Florencia? ¿Qué representa en esta situación? ______________________
- ¿Cómo obtienen los números de frascos necesarios en cada caso? Justifiquen su respuesta. ______________________
- ¿Cómo pueden comprobar los resultados obtenidos? Expliquen. ______________________

Hagamos una reflexión

Cuando la relación entre dos conjuntos de cantidades es inversamente proporcional, el producto de cada par de valores de uno y otro conjunto permanece constante; es la constante de proporcionalidad de esa situación.

Para encontrar un valor desconocido de una de esas cantidades, **se divide la constante de proporcionalidad entre el valor correspondiente de la otra cantidad.**

Por ejemplo, en el caso de la mermelada de tejocote, se tiene que con 24 frascos de 250 g cada uno se puede almacenar toda la mermelada que hay; es decir que hay 24 × 250 g = 6 kilogramos de mermelada. Ésta es la constante de proporcionalidad. Si se deseara usar frascos de 500 g, se necesitarían:

$$\frac{6\text{ kg}}{500\text{ g}} = \frac{6000\text{ g}}{500\text{ g}} = 12 \text{ frascos}$$

¿Y cómo comprobar los resultados? Para ello se multiplica el número de frascos obtenido por el tamaño del frasco; siempre debe obtenerse la constante de proporcionalidad, en este caso, los seis kilogramos de mermelada que la tía quiere almacenar.

b. Un grupo de amigos van a leer una novela que les interesó. Cuando todos la terminen, se van a reunir para comentarla entre ellos. En el grupo hay algunos que leen rápido, mientras que otros disponen de menos tiempo y lo hacen a menor velocidad. Para saber cuántos días les tomará a los que leen con diferentes ritmos, completen la tabla siguiente:

Tiempos que tardan los amigos en leer la novela

Número de páginas que leen por día	10	15	20	25	30	40
Número de días que tardan en terminar la novela			18			

- ¿Cuánto tiempo van a esperar para que todos la hayan terminado de leer? ______________________
- ¿Cuál es el tamaño del libro? ¿Qué significa en esta situación? Expliquen. ______________________

- Describan cómo encontraron los tiempos necesarios para alumnos de distintos ritmos de lectura por día. ____________________

____

- ¿Cómo comprobaron los resultados obtenidos? ____________________
- ¿Cómo es la relación entre el número de páginas por día y el tiempo para terminar el libro? ¿Es de proporcionalidad directa o inversa? ¿Por qué? ____________________

____

____

Para finalizar

1. **Regresen al primer problema del apartado *Construyo algo nuevo* y resuelvan lo siguiente.**

En la situación de los pintores:

- La relación entre el número de pintores y el tiempo para realizar el trabajo, ¿es de proporcionalidad inversa? Expliquen cómo lo determinan. ____________________

____

- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ____________________
- ¿Encontraron los valores indicados en la tabla? Describan su procedimiento.

____

____

2. **En parejas resuelvan el problema aplicando lo que estudiaron en esta secuencia.**

Una piscina se llena por completo en 10 horas cuando se abre una llave que vierte agua a un ritmo de 36 litros por minuto. Completen la tabla siguiente para encontrar cuánto tarda en llenarse la piscina si se utilizan otras llaves que están disponibles y tienen flujos de agua diferentes.

Tiempo de llenado de piscina

Flujo de agua $\left(\frac{L}{min}\right)$	Tiempo de llenado de la piscina (horas)
12	
24	
36	10
40	
48	

- Un día se desea apresurar el llenado de la piscina. Para que se llene en 7 horas o menos, ¿cuál par de llaves de las que están disponibles, pueden abrirse juntas para llenar la piscina? ______________________________

> Comprueben los resultados obtenidos.

3. **Por equipos, diseñen un problema de proporcionalidad inversa. Resuélvanlo y comprueben sus resultados. Propónganlo a otro equipo y resuelvan sus dudas.**

Trabaja con...

Trabajen por parejas.

Utilicen una hoja de cálculo para resolver alguno de los problemas siguientes: el de la mermelada de tejocote; el de los tiempos de lectura; el del llenado de la piscina. Su hoja de cálculo puede ser como la siguiente:

A1 | fx

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4		Tamaño del frasco (g)	Número de frascos		Constante de proporcionalidad =	
5		80				
6		100				
7		150				
8		250	24			
9		300				
10		400				
11		500				
12		600				
13		1000				
14		1200				

Agreguen datos en la columna izquierda. Introduzcan las siguientes fórmulas:

- en la celda F4: =B8*C8
- en la celda C9: =$F$4/B9; después copien esta fórmula en las celdas de la columna C, con excepción de la celda C8

Expliquen el significado de las fórmulas anteriores en relación con la situación de proporcionalidad inversa.

> Comenten en plenaria y con su profesor.

Secuencia

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Proporcionalidad

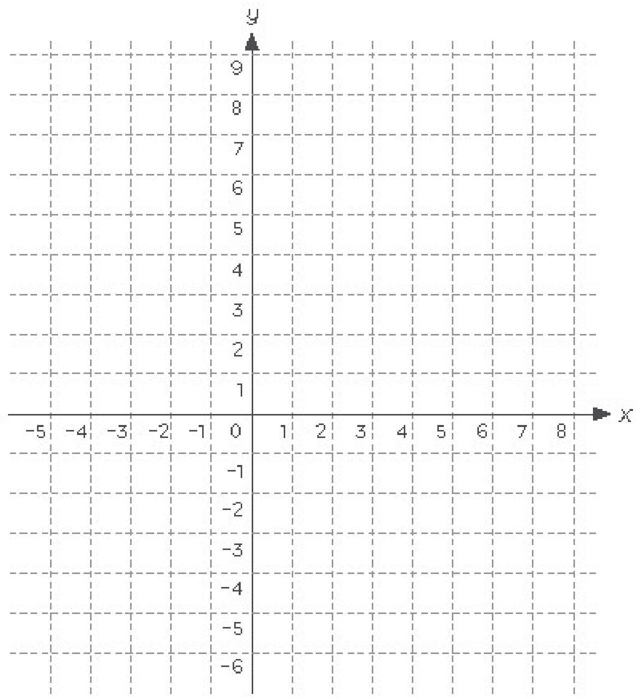
8 Sistemas de ecuaciones
Método gráfico

En primer grado estudiaste cómo resolver un problema que se modelaba con una ecuación. En esta secuencia aprenderás a resolver —por medio de gráficas— problemas con dos cantidades desconocidas, que cumplen con dos condiciones.

Recuperamos lo aprendido

1. **En equipos, lleven a cabo lo siguiente y respondan.**

a. Ubiquen los puntos siguientes en el plano cartesiano: A(0, −3) y B(4, 5);



b. Tracen una recta que pase por los puntos A y B.

- ¿La recta pasa por el punto (1, 3)?, ¿o por (6, 9)? ______
- ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona las cantidades del eje horizontal (o eje de las *x*), con las del eje vertical (o eje de las *y*)? ______

c. Ubiquen otros dos puntos cualesquiera sobre el plano: el C, que esté sobre la recta, y el D que esté fuera de ella.

- ¿Los puntos C y D cumplen con la expresión algebraica que representa la recta? Expliquen su respuesta. ______

> Comenten en el grupo sus observaciones sobre esta actividad.

Recuerda que...

Cuando dos conjuntos de cantidades se relacionan entre sí, cada par de valores correspondientes se puede representar en un plano cartesiano por un punto; el primer valor se busca en el eje horizontal o eje de las abscisas; el segundo valor se ubica sobre el eje vertical, o eje de las ordenadas.

Construyo algo nuevo

Situaciones con dos valores desconocidos

4. Resuelvan en equipo el siguiente problema, respondan lo que se solicita.

En un grupo de segundo grado de una escuela secundaria hay 42 estudiantes. De ellos, el número de mujeres es el doble que el de hombres. ¿Cuál es el número de alumnos y el número de alumnas que forman parte de ese grupo?

- ¿Cuál es el total de estudiantes en el grupo? ______
- ¿Cuáles son los valores desconocidos? ______

a. Elaboren en su cuaderno dos tablas como se indica a continuación.

- Completen una tabla con diferentes pares de valores que cumplan con el primer dato o condición del problema:

Número de mujeres	42	41	40	...
Número de hombres	0	1	2	
Total de alumnos en el grupo	42	42	42	42

- Completen otra con pares de valores que cumplan con la segunda condición del problema:

Número de mujeres	2	4	6	...
Número de hombres	1	2	3	

- ¿Hay alguna pareja de valores que aparezca en las dos tablas anteriores? ______

  ¿Cuál? ______

b. Tracen en su cuaderno un plano cartesiano y ubiquen en él:

- Los puntos que corresponden a las parejas de valores de la primera tabla, es decir las que corresponden a la primera condición; unan estos puntos con una línea de color.
- Los puntos de la segunda tabla, los que corresponden a la segunda condición; unan estos puntos con un color distinto.
- ¿Hay algún punto común que pertenezca a las dos rectas de la gráfica? ¿Cuáles son sus coordenadas? ______
- ¿A qué número de mujeres y de hombres del grupo de segundo grado corresponden las coordenadas de ese punto común?

  Número de mujeres: ______ Número de hombres: ______

- ¿Estos números de mujeres y de hombres en el grupo —obtenidos de la gráfica— cumplen con alguna de las condiciones del problema?

  Condición 1: ______ Condición 2: ______

Recuerda que...

Una situación en la que existe una relación entre dos conjuntos de cantidades se puede representar por medio de tablas de valores, gráficas o algebraicamente.

Por ejemplo, si un automóvil viaja a velocidad constante, la distancia que recorre depende del tiempo de viaje; en una tabla se pueden presentar diversas distancias que corresponden a diferentes tiempos de viaje, es decir, parejas de valores (tiempo, distancia); la gráfica sería una recta en un plano, con los tiempos representados sobre el eje horizontal y las distancias señaladas en el eje vertical; y la expresión algebraica puede escribirse como $d = vt$.

Recuerda que...

En primero de secundaria estudiaste cómo resolver una ecuación de primer grado con una incógnita al pasar los términos de un lado de la igualdad al otro mediante la operación contraria. La solución de una de estas ecuaciones consiste en encontrar el valor de la incógnita con el cual se cumple la condición expresada por la ecuación. Por ejemplo, en la ecuación

$5x + 7 = 10x - 8$

la solución es $x = 3$ porque es el único valor de x para el cual se cumple

$5(3) + 7 = 10(3) - 8$

$22 = 22$

- Asignen literales a cada una de las cantidades:

  Número de mujeres: ______________ Número de hombres: ______________

- Con estas literales, escriban una expresión algebraica que represente cada condición que debe cumplir el número de alumnas y de alumnos.

  Condición 1: ____________________ Condición 2: ____________________

- ¿Qué forma tienen las expresiones algebraicas? ¿Cómo se representan gráficamente en un plano cartesiano? Expliquen. ______________________________

  ____

› **Comparen en el grupo el trabajo, los resultados y las observaciones de los equipos.**

Hagamos una reflexión

Hay situaciones en las que tenemos dos valores desconocidos y dos condiciones que se deben cumplir. Se requiere encontrar dos valores, uno de cada una de las cantidades que se relacionan entre sí.

Por ejemplo, en la situación del grupo de la escuela secundaria, se desconoce el número de mujeres y de varones. Y esos dos números deben cumplir con:

- la primera condición que señala que el total de estudiantes es 42; y también con
- la segunda condición que indica que el número de mujeres es dos veces el de los varones.

¿Cómo se expresan en lenguaje algebraico estas dos condiciones? Si asignamos:

x = número de mujeres y = número de varones

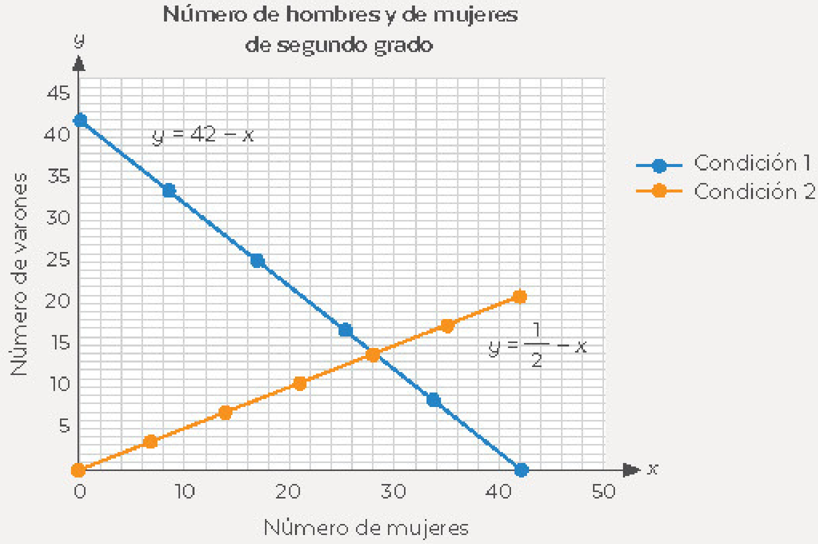
entonces las condiciones de esta situación se expresan algebraicamente como:

Condición 1: $x + y = 42$

Condición 2: $x = 2y$

Así, para contestar la pregunta de la situación, hay que resolver estas dos ecuaciones, cada una con dos incógnitas. Estas ecuaciones forman lo que se conoce como un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Las ecuaciones son de primer grado, porque ambas incógnitas solo están elevadas a la potencia 1.

Número de hombres y de mujeres de segundo grado



En la gráfica, las coordenadas del punto de intersección de las rectas son las únicas que satisfacen las dos ecuaciones y nos muestran la solución del sistema: (28, 14). El punto de intersección está en ambas rectas; por ello, sus coordenadas son soluciones de las ecuaciones que corresponden a esas rectas.

¿Cómo comprobamos que esas coordenadas son la solución del sistema? Para ello, se sustituyen los valores encontrados en las ecuaciones:

Condición 1: $x + y = 42$	$(28) + (14) = 42$
Condición 2: $x = 2y$	$28 = (2) \times (14)$

Y vemos que ambas igualdades se cumplen con los valores encontrados.

3. **Resuelvan el siguiente problema.**

La edad de Elvira es el triple de la edad de su hijo Jerónimo y la suma de sus edades es de 52. ¿Qué edad tiene cada quién?

- ¿Cuáles son los valores desconocidos? ______________________
- ¿Cuáles son las condiciones que se deben cumplir en esta situación? Exprésenlas en palabras. ______________________

  ____
- Expresen las condiciones de esta situación en forma algebraica. ______________________

  ____
- ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que genera esta situación de las edades de Elvira y su hijo? ______________________
- Elaboren tablas que contengan varias parejas de valores para cada una de las ecuaciones.
- Ubiquen las parejas de valores de cada ecuación, como puntos en un plano cartesiano, y obtengan las rectas que las representan.
- Encuentren el punto de intersección de las rectas y comprueben la solución obtenida.

› **Comparen los trabajos de cada equipo y comenten en el grupo.**

Sistemas de ecuaciones incompatibles

1. **Por equipos, encuentren la solución del siguiente sistema de ecuaciones. Realicen y respondan lo que se solicita.**

$$\text{Ecuación 1: } x = 5y$$

$$\text{Ecuación 2: } y = \frac{x}{5} + 2$$

- Elaboren tablas para cada ecuación, encontrando pares de valores para cada una.
- Localicen en un plano cartesiano varios pares de valores de la primera tabla; unan los puntos con una línea de color; en el mismo plano, localicen parejas de valores que correspondan a la segunda ecuación y únanlos con un color diferente.

- Observen la gráfica: ¿hay algún punto común que pertenezca a las dos rectas? ¿Cuáles son sus coordenadas? ______________________
- En la gráfica, ¿cómo son las rectas? ¿Cuál es la posición de una respecto a la otra?
____
____
- En sus tablas, calculen pares de valores adicionales para cada ecuación. Encuentren algún par que aparezca en ambas tablas. ______________________

> **Expliquen sus observaciones sobre este sistema de ecuaciones y compartan con otros equipos en el grupo.**

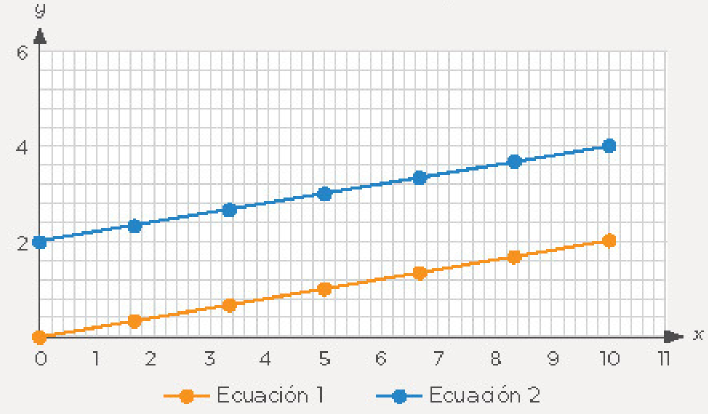
Hagamos una reflexión

Hay sistemas de ecuaciones en los que al elaborar su gráfica, las rectas que representan a cada ecuación resultan ser paralelas, como en el problema anterior:

- En las tablas no es posible encontrar una pareja de valores que sea común a ambas; para cada valor de x siempre se obtienen valores diferentes de y;
- En la gráfica, las rectas no se cortan, no tienen un punto común.

Esto implica que no existe un par de valores que satisfaga ambas ecuaciones, por lo que **no hay solución para pares de ecuaciones cuyas rectas son paralelas**. Se les conoce como **sistemas incompatibles**. Cuando hay un solo par de valores que cumple las dos condiciones, y con el cual se cumplen ambas ecuaciones, se dice que es un **sistema compatible**.

Gráfica de sistema incompatible



2. **Encuentren la solución del siguiente sistema, utilizando gráficas.**

- Elaboren en su cuaderno una tabla para cada ecuación que contengan diferentes pares de valores.
- Ubiquen como puntos en un mismo plano cartesiano, pares de valores de la primera y de la segunda tabla; unan los puntos que correspondan a cada ecuación con líneas de diferentes colores.

- Observen las rectas en la gráfica. ¿Cuál es el punto común que pertenece a las dos rectas? ______
- ¿Cuál es la solución del sistema? ______

> **Compartan su trabajo y comentarios con los demás equipos en el grupo.**

Sistemas de ecuaciones con infinitas soluciones

1. **Resuelvan en equipo el siguiente problema y respondan a lo que se indica.**

Ezequiel y su hija Viviana van al mercado por frutas. Compraron 3 kg de naranjas y 2 kg de manzanas, por lo que pagaron 135 pesos.

Antes de regresar a su casa, Ezequiel recuerda que van a elaborar unos pasteles y a preparar mermeladas, por lo que van a necesitar más frutas. Vuelve al mismo puesto y ahora compra el doble de cantidad de cada fruta; esta vez pagó 270 pesos.

- ¿Cuál es el precio por kilogramo de las manzanas y de las naranjas? ______
- Escojan las literales de su preferencia y escriban una expresión algebraica que represente cada una de las compras de Ezequiel:

  ______ - ______
- ¿Cómo son las dos ecuaciones? ¿Qué relación hay entre ellas? ______

  ______
- También elaboren tablas para cada compra, donde se muestren diferentes pares de valores.
- De las tablas pasen a la gráfica: cada par de valores en la tabla de la primera compra, ubíquenlo como un punto en un plano cartesiano y unan esos puntos con una línea de color; repitan esto con los pares de la segunda tabla.
- Observen la gráfica. ¿Cuál es el punto común a ambas rectas? ¿Hay uno o son más? ______
- ¿Cómo están dispuestas las rectas, una con respecto a la otra? ______

  ______
- En las tablas, ¿hay un par de valores que sea común a las dos tablas o hay más de uno? ______
- Tomen un par de valores que consideren como solución y verifiquen si se cumplen las dos ecuaciones del sistema para ese par de valores. ______
- Para otros dos pares de valores de las tablas —o puntos sobre la recta— repitan la verificación anterior. ______
- ¿Cuál consideran que es la solución de este sistema de ecuaciones? ¿Cuantas soluciones son? Expliquen. ______

  ______

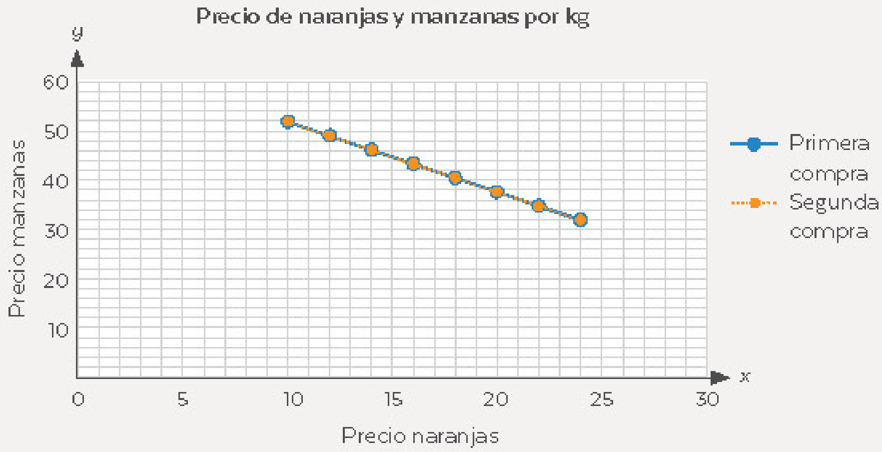
> **Comparen en el grupo lo que encontraron en los equipos.**

Hagamos una reflexión

En algunos sistemas de ecuaciones, **al trazar sus rectas** en un plano cartesiano, éstas **se observan superpuestas**. En las tablas no hay solamente un par de valores común: de hecho, todos los pares de valores son iguales en ambas tablas. Por ello, cada tabla por separado nos da exactamente los mismos puntos sobre el plano cartesiano: se obtiene la misma, **hay una sola recta para representar las dos ecuaciones del sistema.**

Por ejemplo, en la situación de la compra de frutas, la representación de las dos ecuaciones es la misma.

¿Qué implica lo anterior con respecto a la solución de un sistema de ecuaciones como éste? Cualquier punto sobre la recta es una solución del sistema, ya que hace que se cumplan las dos ecuaciones; es decir, **hay un número infinito de soluciones**; esto quiere decir que no hay límite al número de parejas de valores que satisfacen las ecuaciones, porque cada punto sobre la recta es una solución.



2. **Por parejas, encuentren la solución o soluciones del siguiente sistema de ecuaciones.**

Elaboren las tablas de pares de valores para cada ecuación. Pasen esos pares de valores a un plano cartesiano; unan los puntos de cada tabla para obtener sus respectivas líneas rectas.

Observen tanto sus tablas como la gráfica:

- ¿Hay puntos en común entre las dos rectas de la gráfica? __________
- ¿Hay pares de valores que aparezcan en ambas tablas? __________
- ¿Cuál es la solución de este sistema? Mencionen al menos tres. __________
- ¿Cómo se comparan entre sí las dos ecuaciones de este sistema? ¿Qué relación observan entre ambas? __________
- Comparen con otras situaciones de sistemas con infinito número de soluciones y otras con sistemas compatibles. Expliquen. __________

> **Comparen sus observaciones sobre este sistema de ecuaciones y otros; compartan en el grupo.**

Para finalizar

1. En equipo resuelvan los problemas. Apliquen lo aprendido en esta secuencia.

a. Las edades de Blas y Bruno suman 53, pero Bruno es siete años mayor. ¿Cuál es la edad de cada uno de los amigos?

Determinen cuáles son las incógnitas y formulen las ecuaciones que componen el sistema. Luego encuentren la solución del sistema utilizando una gráfica.

b. Benjamín acaba de abrir su puesto de quesos. Su primer cliente se llevó 2 kg de queso tipo manchego y 3 ½ kg de queso de Oaxaca, por lo que pagó \$520. Más tarde, otro cliente le compró 500 g de queso tipo manchego, así como 5 kg de queso Oaxaca, por los que pagó \$460.

- ¿A qué precio por kilogramo vende Benjamín sus quesos tipo manchego y de Oaxaca? ______________________

c. Determinen cuántas soluciones hay para los siguientes sistemas y qué tipo son. Obtengan una o más soluciones según sea posible.

- $\begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ y = \dfrac{6x - 24}{8} \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x - y = 15 \\ 6x - 3y = 40 \end{cases}$
- $\begin{cases} y - 2x = 6.5 \\ x + 2y = 23 \end{cases}$

Trabaja con...

Trabajen por parejas.

Seleccionen alguna de las situaciones presentadas en esta secuencia. Utilicen una hoja de cálculo para resolver el sistema de ecuaciones; la siguiente muestra cómo la podrían diseñar para la situación del grupo de alumnos de segundo grado, al inicio de la secuencia.

Introduzcan las siguientes fórmulas:

- en la celda C7: =42-B7; copien esta fórmula en las celdas de la columna C;
- en la celda D7: determinen cuál es la fórmula que se necesita introducir en esta celda.

Expliquen el significado de las fórmulas anteriores en relación con la situación y el sistema de ecuaciones que se desea resolver.

Para obtener la gráfica, seleccionen la tabla y usen el menú *Insertar-gráficos de dispersión con líneas rectas y marcadores.*

> Comenten en plenaria y con su profesor sus observaciones sobre esta actividad.

L1 | fx

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5			Hombres	Hombres	
6		Número de mujeres	Condición 1	Condición 2	
7		0			
8		5			
9		10			
10		15			
11		20			
12		25			
13		30			
14		35			
15		40			
16		45			
17		50			
18					

9 Sistemas de ecuaciones
Métodos de sustitución e igualación

En la secuencia anterior resolviste problemas que se representan con dos incógnitas y dos ecuaciones, empleando herramientas gráficas. Ahora conocerás otros métodos para resolverlos, utilizando transformaciones algebraicas.

Recuperamos lo aprendido

1. **Realicen lo que se indica y respondan.**

   Rafael y Mónica fueron al cine. Compraron un refresco mediano y dos bolsas de palomitas grandes, todo por 165 pesos. ¿Cuál fue el precio de una bolsa y del refresco, si las palomitas costaron 15 pesos más que el refresco?

   - Señalen cuáles son las incógnitas o valores desconocidos en esta situación.

     ____

   - Escriban las expresiones algebraicas que representan las condiciones de esta situación para formar el sistema de ecuaciones de primer grado.

     ____

     ____

   - Resuelvan el sistema utilizando el método gráfico:
     - Elaboren en su cuaderno un plano cartesiano y tracen las rectas que representan las dos condiciones, es decir, las dos ecuaciones del sistema.
     - Encuentren su punto de intersección.
     - Comprueben la solución.

> **Comenten en el grupo y con su profesor.**

Construyo algo nuevo

Solución de sistemas de ecuaciones por sustitución

1. **Resuelvan en equipo el siguiente problema y respondan lo que se solicita.**

   Alex compró 4 cuadernos y 5 bolígrafos, y la cuenta por estos artículos fue de 104 pesos. Cada cuaderno le costó el doble que un bolígrafo. ¿Cuál fue el precio de cada cuaderno y de cada bolígrafo?

   - Asignen literales a las incógnitas de esta situación.
   - Formulen las expresiones algebraicas que correspondan a las condiciones del problema para obtener las ecuaciones del sistema.

- En una de las ecuaciones del sistema, ¿alguna de las incógnitas está despejada? ¿Cuál? ______
- Las dos ecuaciones del sistema representan las condiciones de la compra de Alex.
    - el precio de un bolígrafo, representado por una literal, ¿es el mismo precio en ambas ecuaciones? Justifiquen su respuesta. ______
    - el precio de un cuaderno, representado por la otra literal, ¿es el mismo precio en ambas ecuaciones? ______
- Si en la segunda ecuación observamos que el precio de un cuaderno está despejado, ¿puede representarse su precio con esta misma expresión, también en la primera ecuación? Justifiquen. ______
- Al simplificar términos, ¿cuántas incógnitas se observan en la primera ecuación del sistema?, ¿es posible ya resolver el sistema completo? ______
- ¿Cómo obtuvieron la solución? Describan los pasos y operaciones que llevaron a cabo para resolver este sistema. ______
- Al terminar verifiquen la solución comprobando que se cumplen las dos ecuaciones.

> **Expliquen a otros equipos cuál fue el proceso que encontraron.**

Hagamos una reflexión

En un sistema de ecuaciones, **cuando una de las incógnitas está despejada** se puede **reemplazar la incógnita por su expresión, en la otra ecuación del sistema**. Esto se debe a que las dos ecuaciones, aunque expresan condiciones diferentes, pertenecen a la misma situación; y el valor de cada incógnita es el mismo en ambas ecuaciones o condiciones del problema.

De esta manera, esa otra ecuación del sistema pasa a tener una sola incógnita, y sigue siendo de primer grado; y ésta puede resolverse con los procedimientos aprendidos en primero de secundaria.

Por ejemplo, en la situación de la compra de Alex, un cuaderno cuesta el doble que un bolígrafo; la ecuación puede escribirse como $c = 2b$, si suponemos que

c: precio de un cuaderno
b: precio de un bolígrafo

La ecuación que expresa la otra condición del problema es: $4c + 5b = 104$.

Al sustituir en esta última el precio del cuaderno, expresado en términos del precio del bolígrafo, $c = 2b$, se tiene:

$$4(2b) + 5b = 104.$$

Cuando se simplifica, se llega al precio de un bolígrafo: 8 pesos; y de un cuaderno: $16

Recuerda que en un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

- ambas ecuaciones se deben cumplir, ya que representan las condiciones de la situación; y
- las literales significan lo mismo en ambas ecuaciones.

Diccionario

Incógnita despejada
Cuando la incógnita de una ecuación está expresada en términos de constantes y de otras incógnitas, es decir que está aislada de un lado del signo de igualdad. Por ejemplo, en la ecuación $x + 2y = 5$, para despejar la incógnita y, es decir, dejarla aislada de un lado del signo de igualdad, los pasos son:

primero:
$2y = 5 - x$

y queda despejada como:
$y = \frac{5 - x}{2}$.

2. Resuelvan el siguiente problema, por sustitución.

Juan y Evangelina trabajan en la misma empresa. Entre los dos ganan \$12 800 al mes, y ella gana 1500 pesos más que él. ¿Cuál es el sueldo mensual de cada quién?

- Representen cada incógnita con su respectiva literal y formulen las expresiones algebraicas necesarias para obtener las ecuaciones del sistema.
- Observen el sistema: ¿en alguna de sus ecuaciones hay una incógnita que esté despejada? ______________________________
- Resuelvan algebraicamente para encontrar la solución del sistema de ecuaciones y comprueben que esa solución permita que se cumplan las dos ecuaciones.
- ¿Cómo obtuvieron la solución? Describan los pasos y operaciones que realizaron.

  ____

Comparen y comenten en el grupo, qué hicieron y cuál fue el proceso que realizaron.

Solución de sistemas de ecuaciones por igualación

1. Resuelvan en equipo el siguiente problema y respondan lo que se solicita.

Silvestre va a rentar una camioneta y pide información a dos empresas de alquiler de vehículos. Por la camioneta que le interesa a Silvestre, le cobran en la compañía A una cuota fija de \$1450 y \$19.50 por kilómetro recorrido. El mismo modelo, en la compañía B, le costaría \$2 125 de cuota fija y adicionalmente \$12 por cada kilómetro recorrido.

- ¿Para cuántos kilómetros de recorrido pagaría lo mismo en ambas compañías?

  ____

- Representen las incógnitas con literales y obtengan las expresiones para las ecuaciones del sistema.
- Al observar el sistema, ¿alguna de las incógnitas está despejada en las ecuaciones que han formulado? ¿Cuál es su expresión? ______________________________
- ¿Cómo están expresados los costos en ambas empresas? ¿La literal que representa los kilómetros de recorrido es la misma en ambas expresiones? ______________

  ____

- A Silvestre le interesa saber cuándo el costo del vehículo en una empresa es igual al costo en la otra. ¿Cómo puede representar esto, utilizando las dos expresiones de costos, en términos de distancia recorrida? Expliquen su respuesta. ______________

  ____

- Resuelvan algebraicamente, sin utilizar gráfica: al obtener una sola ecuación, con la distancia como única incógnita, encuentren la distancia en la que los costos serían iguales. Comprueben la solución que obtuvieron verificando que se cumplen las condiciones establecidas en esta situación. ______________________________

  ____

- Describan cómo llegaron a la solución de este problema. ______

Compartan su procedimiento con los demás equipos y vean lo que cada uno realizó.

Hagamos una reflexión

Si en un sistema de ecuaciones las dos incógnitas están despejadas, se pueden igualar las dos expresiones, ya que representan lo mismo. Así, se obtiene solo una ecuación de primer grado, con una incógnita, cuyo valor puede ahora obtenerse por los procedimientos correspondientes.

Por ejemplo, en la situación de la renta de una camioneta, si a las incógnitas: la renta pagada y las distancias o kilómetros de recorrido, las designamos por

R: pago de renta en pesos
d: distancia recorrida en kilómetros

entonces las ecuaciones serán:

Compañía A: $R = 19.5d + 1450$
Compañía B: $R = 12d + 2125$

Como las dos expresiones representan lo mismo —como varía la renta en función de la distancia— se igualan y se llega a una ecuación donde únicamente aparece la incógnita *d*:

$$19.5d + 1450 = 12d + 2125$$

Al simplificar y despejar, se obtiene el valor de la distancia para el cual las dos rentas son iguales: $d = 90$ kilómetros. Con esto queda resuelta la pregunta del problema. Sin embargo, para completar la solución del sistema, el valor de la renta en ambas compañías, para esa distancia recorrida es de

Compañía A: $R = 19.5(90) + 1450 = \$3205$

Ahora ya se puede efectuar la comprobación, sustituyendo los valores encontrados en la ecuación de la compañía B:

$$R = 12(90) + 2125 = \$3205$$

2. **Resuelvan el siguiente problema, por igualación.**

El perímetro de un triángulo isósceles es de 30 cm. El triple de la longitud de su lado desigual es de un centímetro menos que la longitud de uno de los lados iguales. ¿Cuánto miden los lados de este triángulo?

- Representen sus incógnitas por literales y escriban las ecuaciones que representan esta situación. ______
- ¿En ambas ecuaciones está despejada la misma incógnita? Si no es así, ¿qué expresiones pueden igualarse y cómo se obtienen? ______
- Una vez encontrada la solución del sistema, comprueben su resultado.

Expliquen y comparen en el grupo el procedimiento que cada equipo utilizó para encontrar las medidas del triángulo.

Solución de sistemas de ecuaciones por reducción

1. **Resuelvan en equipo el siguiente problema. Trabajen en su cuaderno.**

En un almacén empacan un producto en cajas de dos tamaños: grande y pequeña. Una vez empacado el producto, dos cajas grandes y tres pequeñas pesan 60 kg, y una caja grande y una pequeña pesan 25 kg. ¿Cuánto pesa el producto en una caja grande y cuánto en la pequeña?

- Asignen literales a los valores desconocidos en esta situación.
- Formulen las expresiones algebraicas que correspondan a las dos condiciones del problema; escriban las ecuaciones del sistema.
- Si en la ecuación que representa la segunda condición, multiplican cada término por dos, ¿se conserva la igualdad? Expliquen su respuesta.
- Escriban las dos ecuaciones del sistema, incluyendo ahora esta nueva forma de la segunda condición, que ha sido multiplicada por dos:
  Condición 1: ____________________ Condición 2: ____________________
- Comparen las dos ecuaciones: ¿hay el mismo número de cajas grandes en ambas?, ¿y de cajas pequeñas?
- Las dos ecuaciones se refieren a las mismas cajas, con los mismos pesos desconocidos. ¿Qué sucede si a la primera ecuación le restamos término a término la segunda ecuación? ¿Cuál es la expresión que resulta?
- ¿Es posible ya resolver el sistema completo? ¿Cómo obtuvieron la solución? Describan los pasos y operaciones que llevaron a cabo para resolver este sistema.

> **Al terminar verifiquen la solución, comprobando que se cumplen las dos ecuaciones.**

Hagamos una reflexión

Cuando se tiene un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y ninguna de ellas está despejada, se puede resolver utilizando el método del apartado anterior. Este es el método de reducción o de suma y resta, y es de gran utilidad para resolver numerosos casos de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Si asignamos x: peso de una caja grande y y: peso de una caja pequeña, el sistema es el siguiente:

Condición 1: $2x + 3y = 60$ Condición 2: $x + y = 25$

Al multiplicar todos los términos de una ecuación por un factor, la igualdad se conserva, es decir, las incógnitas conservan su valor original. En el caso del almacén, si multiplicamos la segunda ecuación por dos y escribimos de nuevo el sistema, tenemos:

Condición 1: $2x + 3y = 60$ Condición 2: $2x + 2y = 50$

La diferencia entre estas dos condiciones es de una caja pequeña, de un lado de la igualdad; del otro lado queda su valor, de 10 kg; sustituyendo este valor en la primera ecuación se obtiene el peso de las cajas grandes.

La operación de diferencia —o de suma— entre las dos ecuaciones es válida, puesto que en ambas los valores de las incógnitas son los mismos y las dos ecuaciones se refieren a la misma situación, en este caso al almacén con cajas grandes y pequeñas.

La operación de diferencia se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 60 \\ \underline{-2x - 2y = -50} \\ y = 10 \end{array}$$

2. **Resuelvan el siguiente sistema, por reducción.**

- $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 19 \end{cases}$

Para finalizar

1. **Formen parejas y trabajen en su cuaderno. Apliquen lo estudiado en esta secuencia.**

- ¿Resolvieron el problema del inicio de la secuencia —sobre las compras de Rafael y Mónica en el cine— utilizando una tabla de valores? Ahora resuélvanlo por medio de los métodos de sustitución y de igualación.
- Comparen los procedimientos y operaciones realizadas en cada caso. ¿Cuál consideran el más adecuado para resolver este problema (incluyendo en la comparación la tabla de valores)?

2. **En equipo, resuelvan en su cuaderno los siguientes problemas.**

a. El profesor de educación física compró 12 balones, algunos para futbol y otros para basquetbol. Los de futbol le costaron \$150 cada uno, mientras que los de basquetbol fueron a \$220 por unidad. Si en total pagó \$2080, ¿cuántos balones compró para cada deporte? Resuelvan por igualación.

b. Encuentren la solución de los siguientes sistemas por el método que consideren más adecuado para cada caso; comprueben sus resultados.

- $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y = 5500 \\ ay = x + 1800 \end{cases}$

c. Diseñen un problema que se pueda plantear y resolver con un sistema de ecuaciones de primer grado. Resuélvanlo por los métodos gráfico, de sustitución y por igualación. Propónganlo a otro equipo y resuelvan sus dudas.

> Comparen sus resultados con los de los demás equipos del grupo y comenten sus observaciones con apoyo de su profesor.

Trabaja con...

Trabajen en equipos. Retomen y revisen su trabajo de la secuencia 8 y respondan.

En la secuencia 8 utilizaron una hoja de cálculo para resolver gráficamente el problema de los alumnos de un grupo de segundo de secundaria.

El primer paso consistió en elaborar una tabla de valores que incluía dos columnas para ser llenadas, una para cada condición del problema; y en estas columnas se introdujeron fórmulas, con las cuales se generaron los diferentes valores:

En la celda C7 se introdujo la siguiente fórmula: =42 -B7; la fórmula para la celda D7 quedó para ser determinada por el equipo.

- Expliquen el significado de esas fórmulas, ahora en relación con los métodos de solución que se estudiaron en la presente secuencia. ____________________

____
- ¿A cuál de estos dos métodos —por sustitución, por igualación— corresponden las fórmulas que se utilizaron en la hoja de cálculo para encontrar los pares de valores? Justifiquen su respuesta. __________

____

> Comenten sus resultados y observaciones en grupo y con su profesor.

Secuencia

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Funciones

10 Proporcionalidad inversa a partir de tablas y expresiones algebraicas

En la secuencia 7 aprendiste a reconocer situaciones de proporcionalidad inversa, compararlas con las de proporcionalidad directa, y encontrar valores faltantes. Ahora podrás pasar de sus representaciones tabulares a las algebraicas.

Recuperamos lo aprendido

1. **Resuelvan lo siguiente por equipos.**

   Dos campesinos tardaron seis días en sembrar un terreno. Ellos dos, y todos los demás que participan en la tarea, trabajan al mismo ritmo y con el mismo rendimiento.

   - ¿Cuántos días tardarán cuatro campesinos en sembrar el mismo terreno? ________
   - Si el terreno se sembró en cuatro días, ¿cuántos campesinos lo sembraron? ________
   - Elaboren una tabla donde se muestren los días que les tomaría sembrar el terreno a varios números de campesinos.
   - Describan la relación entre el número de campesinos y los días que tardan en sembrar el terreno. Comenten en plenaria.

Recuerda que...

- Si dos conjuntos de cantidades son inversamente proporcionales, al multiplicar un valor de una de ellas por un factor, el valor correspondiente de la otra cantidad se divide por ese mismo factor; además, el producto de los valores correspondientes de uno y otro conjunto es igual para todo par de valores, y es la constante de proporcionalidad inversa.
- Se utilizan literales para representar cantidades que pueden variar cuando se escriben fórmulas para obtener los perímetros y áreas de diferentes figuras geométricas. También se utilizan para representar incógnitas o valores desconocidos cuando se modela una situación y se resuelve la ecuación correspondiente. Recuerda que cualquier letra o literal se puede usar para representar la incógnita o la cantidad que varía.

Construyo algo nuevo

Representación algebraica de una situación de proporcionalidad inversa

1. **Resuelvan el siguiente problema por equipos.**

   Abelardo y Rosa María participarán en un sorteo de pronósticos deportivos. La quiniela o pronóstico que van a hacer les costará $4 320 en total. Están buscando otras personas que quieran participar y compartir el costo, con aportaciones iguales para todos.

Rosa María y Abelardo quieren saber cómo cambia el costo si participa diferente número de personas; para ello, elaboran la tabla siguiente. Complétenla.

Número de personas que participan [x]	1	2	3	4	5	10
Costo de la aportación ($) [$y$]	4320					432
Costo quiniela = número de personas × aportación [xy]	4320					

- Si el número de personas que participan aumenta, ¿qué sucede con la cantidad que cada una debe aportar? ____________________
- ¿La relación entre las cantidades es de proporcionalidad inversa? ¿Cuál sería la constante de proporcionalidad inversa en este caso? Expliquen. ____________________
- Describan cómo obtuvieron los valores faltantes en la tabla. ____________________
- Rosa María propone que obtengan los valores de la tabla de otra manera escribiendo una expresión algebraica que represente la situación. ¿Cuál puede ser esa expresión algebraica? ____________________
- ¿Cuál es la relación entre las cantidades y la constante de proporcionalidad inversa? ____________________
- ¿Qué operación realizan con cualquier par de valores —número de personas y aportación de cada una— para obtener la constante? ____________________
- Si se representa cada cantidad por una literal, ¿cuál es la expresión algebraica que corresponde a esta situación? ____________________

Hagamos una reflexión

En una situación de proporcionalidad inversa, el producto de cualquier par de valores da como resultado la constante de proporcionalidad inversa. Por ejemplo, en el caso de las participaciones en la quiniela de pronósticos:

(2 personas) × ($2160) = $4320

y en general: (Número de personas) × (Aportación de cada persona) = $4320

Si se escoge representar las cantidades como:

Cantidades	Literales con las que se representan:
Número de personas	n
Aportación de cada persona	A

entonces la expresión algebraica para esta situación es: $n \times A = 4320$ o $nA = 4320$.

De esta manera, vemos que **se puede representar una relación de proporcionalidad inversa entre dos cantidades por medio de una tabla, o de una expresión algebraica**, asignando literales (x y y, por ejemplo) a los dos conjuntos de cantidades; como su producto es constante (k, por ejemplo), **la forma de la expresión algebraica** de una relación de proporcionalidad inversa **es $xy = k$**.

Recuerda que...

En primer grado se estudiaron diversas situaciones de variación funcional. En estas, los valores de una cantidad varían en función de los valores de la otra cantidad, o dependen de ellos.

Cuando los conjuntos de cantidades (designados por x y y) son directamente proporcionales, la forma de la expresión algebraica que los representa es $y = kx$, donde k es la constante de proporcionalidad directa.

Si las cantidades no son directamente proporcionales, pero su relación es lineal, la forma de las expresiones algebraicas es $y = kx + b$, donde b es otra constante que depende de los datos en la situación de que se trate.

2. **Resuelvan el siguiente problema por equipos.**

Un grupo de segundo grado de la escuela va a asistir a un evento, para lo cual se va rentar un autobús. La renta va a costar $2700.

- Si asiste todo el grupo, que consta de 45 alumnos, ¿cuánto deberá pagar cada alumno? ______
- Si solamente viajan 40 o 30 de los alumnos del grupo, ¿cuánto le tocará pagar a cada uno de ellos? ______
- ¿Las cantidades en esta situación son inversamente proporcionales? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? Expliquen su respuesta. ______
- Describan la relación entre las cantidades y la constante de proporcionalidad. ¿Qué operaciones realizan? ______
- Obtengan una expresión algebraica para representar esta situación; por ejemplo, pueden usar la literal n para el número de alumnos y p para el pago o costo del viaje por alumno. ______

› **Comparen resultados entre equipos y comenten en el grupo.**

Utilizar la expresión algebraica para obtener valores faltantes

1. **En equipo, resuelvan los siguientes problemas.**

   a. Una asociación de ecologistas va a reforestar un terreno con 5 600 arbolitos. Los va a plantar de manera que cada fila tenga el mismo número de arbolitos; es así que piensa poner 80 árboles en cada una de 70 filas. También quiere saber de qué otra manera se pueden distribuir en el terreno: si aumenta el número de filas, va a tener que poner menos árboles en cada fila y viceversa.

- ¿Se trata de una relación de proporcionalidad inversa entre estas cantidades? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? Expliquen. ______________________
- Encuentren una expresión algebraica que represente esta situación. Escojan las literales que prefieran para representar las cantidades. ______________________
- Utilicen la expresión algebraica para obtener los números de árboles por fila, al menos para los valores indicados, en la tabla siguiente:

Número de filas	70	80	100	50	40		
Número de arbolitos por fila	80						

› **Comprueben los resultados que vayan obteniendo.**

Hagamos una reflexión

Al utilizar la expresión algebraica de una situación de proporcionalidad inversa, es posible calcular cualquier par de valores. Por ejemplo, si la expresión algebraica para la situación de los arboles es:

$$af = 5\,600$$

donde

Número de filas = f

Número de arbolitos por fila = a

entonces, para 20 filas, por ejemplo, el número de árboles que corresponde es de:

$$a(20) = 5\,600$$

es decir

$$a = \frac{5600}{20} = 280 \text{ árboles}$$

Para comprobar el resultado, solo es necesario efectuar la operación inversa, es decir, multiplicar un par de valores, por ejemplo,

(56 árboles po fila) × (100 filas) = 5 600 árboles en total

y verificar que siempre se obtenga la constante de proporcionalidad.

b. La profesora de prescolar llevará a sus alumnos de excursión. Ella sabe que en este tipo de salidas, los niños consumen bastante agua. En el autobús siempre llevan la misma cantidad: 60 litros de agua.

- Si va completo su grupo de 30 alumnos, ¿cuántos litros de agua podrá beber cada alumno durante la excursión? ______________________
  ¿Y si asisten solo 25 alumnos? ______________________

El número de alumnos puede variar ya sea porque en ocasiones algunos niños no pueden participar, y a veces porque a la profesora le encargan alumnos de otros grupos.

- ¿La situación involucra cantidades inversamente proporcionales? Expliquen su respuesta. ____________________
- Formulen una expresión algebraica que represente esta situación; asignen a las cantidades las literales de su preferencia. ____________________
- Utilicen la expresión algebraica para obtener diferentes pares de valores; es decir, para diferente número de niños en la excursión, ¿cuál sería la cantidad de agua disponible para ellos en cada caso? Llenen la tabla con sus resultados.

> Comprueben sus resultados y comenten en grupo.

Para finalizar

1. ¿Resolviste el problema con el que se inicia esta secuencia?

Escribe una expresión algebraica que represente la situación y completa la tabla.

Número de campesinos	2	6		1	12	5
Días que tardan en sembrar el terreno	6		4			

2. Resuelvan el siguiente problema por equipos.

Ezequiel necesita un seguro porque acaba de comprar un automóvil. Asegurar su auto por un año le va a costar $9 600. Le informan que puede pagar esa cantidad de contado, pero también es posible pagarla en 3, 6, 9 o 12 pagos iguales sin intereses.

- ¿La anterior es una situación de proporcionalidad inversa? Expliquen por qué. ____________________
- ¿Cuáles son las cantidades que se relacionan? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ____________________

- Formulen una expresión algebraica para representar esta situación; decidan las literales que emplearán y usen esta expresión para determinar los valores faltantes.

- Llenen la tabla con sus resultados.

> Compartan y comparen el trabajo de los equipos en el grupo.

Trabaja con...

Resuelvan por parejas.

Seleccionen una de las situaciones de esta secuencia: las aportaciones para el sorteo de pronósticos deportivos; el costo del viaje en autobús; la distribución de arbolitos para reforestar un terreno; las porciones de agua para los alumnos de preescolar.

Elaboren una tabla en una hoja de cálculo con los datos de la situación que hayan seleccionado, similar a la siguiente:

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4		Número de personas	Aportación por persona		Constante de proporcionalidad =	
5		1	4320			
6		2				
7		3				
8		4				
9		5				
10		6				
11		10				
12		12				
13		15				
14		20				
15						
16						

Incluyan más datos en la columna de la izquierda. Introduzcan las siguientes fórmulas:

- en la celda F4: =C5/B5
- en la celda C6: =$F$4/B6; después copien esta fórmula en las celdas de la columna C, de la C7 en adelante.

Expliquen el significado de las fórmulas anteriores en relación con la situación de proporcionalidad inversa.

> Comenten en plenaria y con su profesor.

11 Representación gráfica de relaciones de proporcionalidad inversa

En la secuencia anterior aprendiste a obtener la expresión algebraica de una relación de proporcionalidad inversa entre dos cantidades. En la presente secuencia estudiarás, a partir de las representaciones tabular y algebraica, las representaciones gráficas de estas relaciones.

Recuperamos lo aprendido

1. **En parejas, resuelvan lo que se indica.**

- Para la situación que se plantea en la secuencia 7, sobre los pintores y el tiempo que tardan en pintar el exterior de un edificio, obtengan la expresión algebraica que representa dicha situación.
- Comprueben que a partir de la expresión algebraica, se obtienen los mismos valores que obtuvieron en la tabla.

Recuerda que...

En primer grado trazaste gráficas que representaban situaciones de proporcionalidad directa y de variación lineal:

- cada par de datos correspondientes —tomados de la tabla o de la expresión algebraica de la situación— se considera como un par ordenado y se puede representar como un punto en un plano cartesiano;
- cuando se han ubicado suficientes pares de datos, se unen los puntos para trazar una línea que pasa por todos ellos.

Construyo algo nuevo

Construir la gráfica de una situación de proporcionalidad inversa

1. **Resuelvan lo siguiente por equipos.**

Dos amigos quieren comprar una consola de videojuegos que cuesta $6 000. Como no les alcanza con sus ahorros, van a invitar a otros compañeros para que aporten y puedan adquirirla, y luego compartir entre todos el uso del aparato.

- ¿Cuáles serían las aportaciones de cada uno de los participantes (el número puede variar desde 2 hasta un total de 12)?; las aportaciones serían iguales para todos. ______________________________

____

- Verifiquen si se trata de una relación de proporcionalidad inversa y cuál es, en este caso, la constante de proporcionalidad inversa. Expliquen su respuesta. ______________

____

____

- Usen las letras que prefieran para nombrar las cantidades de esta situación. Formulen una expresión algebraica que la represente; utilícenla para encontrar diferentes pares de valores participantes-aportación, y presenten estos resultados en una tabla.

Número de participantes	2	3	5	6	8
Aportación por participante ($)	3 000				

- Utilicen los pares de valores anteriores y represéntelos en un plano cartesiano para obtener la gráfica de las aportaciones para la consola de juegos.

Hagamos una reflexión

Las situaciones de proporcionalidad inversa también se pueden representar de forma gráfica. Para ello:

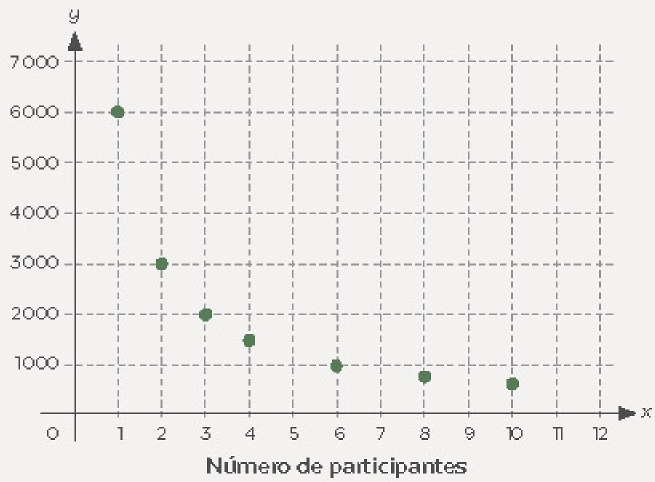
- se calcula un cierto número de pares de valores de las cantidades que intervienen en la situación; para facilitar y organizar su manejo, se pueden presentar en una tabla;
- cada par de valores se representa como un punto en un plano cartesiano: uno de los valores se ubica sobre el eje horizontal del plano, y el otro valor del par sobre el eje vertical; esto se repite para varios pares de valores;
- cuando se cuente con suficientes puntos en el plano cartesiano, se unen estos puntos con una línea continua, la cual constituye la gráfica de la situación.

Por ejemplo, en la situación de las aportaciones para la consola de juegos, los siguientes pares de valores:

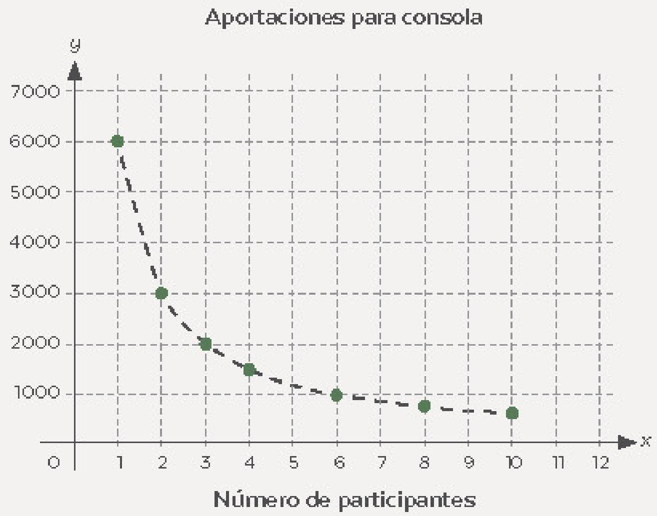
Número de participantes	Aportación por participante ($)
1	6 000
2	3 000
3	2 000
4	1500
6	1 000
8	750
10	600

se ubican en un plano cartesiano como se muestra a continuación:

Aportaciones para consola



y si se utiliza una hoja de cálculo, al unir los puntos, se obtiene la gráfica siguiente:



Cabe señalar que unir los puntos que se han ubicado sobre el plano cartesiano, es solamente con el propósito de observar la tendencia general de los datos; es claro que una línea continua no representaría la realidad, ya que el número de personas solo puede expresarse con números enteros.

2. Resuelvan el siguiente problema, por equipos.

Carlos y Magdalena administran un pequeño supermercado. Entre otros productos, quieren vender chocolates y para surtirse van a visitar a un fabricante. Decidieron que van a comprar 240 chocolates. Les informan que los venden en cajas de 2, 4, 6, 12, 20 o 40 chocolates.

- ¿Cuántas cajas de los diferentes tamaños tendrían que comprar para llevarse la cantidad de chocolates que desean adquirir? ______________________

____

- Verifiquen que sea una relación de proporcionalidad inversa y encuentren su constante de proporcionalidad inversa. Expliquen su respuesta.

____
____
____

- Escriban una expresión algebraica que sirva para representar esta situación.
- A continuación elaboren una tabla donde muestren los distintos valores de ambas cantidades y comprueben los resultados obtenidos.
- Finalmente, tracen una gráfica en un plano cartesiano que también represente la situación de la compra de chocolates.

Recuerda que...

Cuando estudiaste las relaciones de **variación lineal** en primer grado, aprendiste que **sus graficas son líneas rectas**, y que por medio de la razón de cambio podemos conocer lo que aumenta (o disminuye) la segunda cantidad, cuando varía la primera:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\text{Cambio en la segunda cantidad}}{\text{Cambio en la primera cantidad}}$$

En la gráfica de una situación de variación lineal, la **razón de cambio** expresa **cuánto aumenta** (o disminuye) **la recta cada vez que la cantidad en el eje horizontal se incrementa en una unidad**.

- Comprueben que se obtienen los mismos datos en cualquiera de las tres formas de representación de la relación proporcionalidad inversa entre las cantidades.

> **Comparen sus resultados con los de los demás equipos del grupo y comenten sus observaciones con apoyo de su profesor.**

Gráficas de proporcionalidad inversa: propiedades

1. Resuelvan y contesten lo siguiente, trabajando en equipos.

Don Genaro desea comprar un terreno para cultivar flores en invernadero. Está buscando terrenos de forma rectangular con media hectárea (5 000 m^2) de superficie. Hasta ahora le han ofrecido los siguientes, cuyos frentes son los siguientes:

Frente del terreno (m)	250	200	160	125	100	80
Fondo del terreno (m)						

- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad inversa? Encuentren las medidas del fondo de los terrenos anteriores. ______________________

A don Genaro no le convienen los terrenos que sean muy largos y un tanto estrechos, por la instalación de los invernaderos; con este propósito:

- Determinen una expresión algebraica que represente esta situación y que permita a don Genaro conocer las dimensiones de cualquier terreno;
- Tracen una gráfica que represente esta situación, es decir que represente las dimensiones de los posibles terrenos que podría comprar don Genaro; ubiquen los frentes de los terrenos sobre el eje horizontal del plano cartesiano.

Una vez trazada la grafica, contesten:

- ¿La gráfica crece o decrece, a medida que aumenta el frente de los terrenos? ______________________
- ¿Para qué valores tiende a crecer más rápido y para cuáles con mayor lentitud? ______________________
- ¿Qué sucede con la gráfica a medida que el frente de los terrenos se aproxima a cero?, ¿podría ser de cero? ______________________
- Los puntos localizados en el plano cartesiano ¿pueden unirse con una línea recta? ¿Cómo son las razones de cambio entre dos pares de puntos? Expliquen. ______________________

____

> **Comparen y comenten entre equipos su trabajo en esta actividad.**

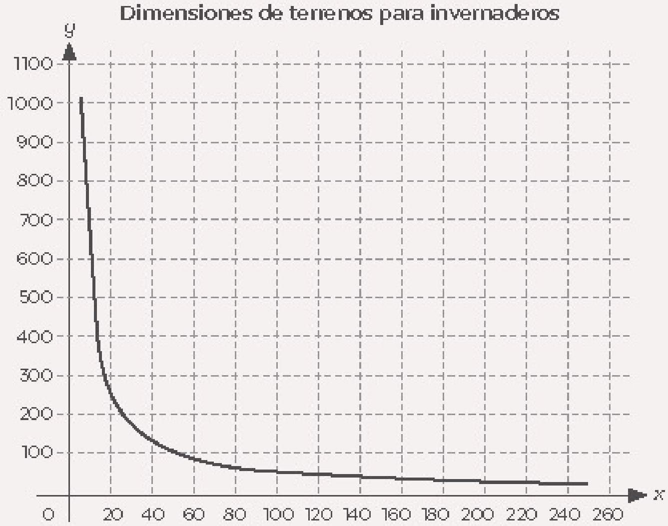
Hagamos una reflexión

La gráfica donde se representa una situación de proporcionalidad inversa tiene las siguientes características:

- la gráfica es decreciente; es decir que a medida que aumenta la cantidad en el eje horizontal, la gráfica disminuye;
- la gráfica crece cuando disminuyen los valores de la cantidad del eje horizontal: aumenta muy rápido cuando esos valores tienden a cero, y la gráfica crece lentamente para valores altos en el eje horizontal;
- a medida que la cantidad del eje horizontal se acerca a cero, la gráfica crece indefinidamente; pero no llega a cruzar o tocar el eje vertical del plano, por lo que la cantidad del eje horizontal no alcanza el valor de cero;
- las razones de cambio entre diferentes pares de puntos, no son iguales; esto indica que los puntos no están sobre una línea recta; se tienen que unir mediante una línea curva.

Por ejemplo, estas características pueden observarse en la gráfica que representa la situación de las dimensiones de los terrenos:

Dimensiones de terrenos para invernaderos



Frente del terreno (m)

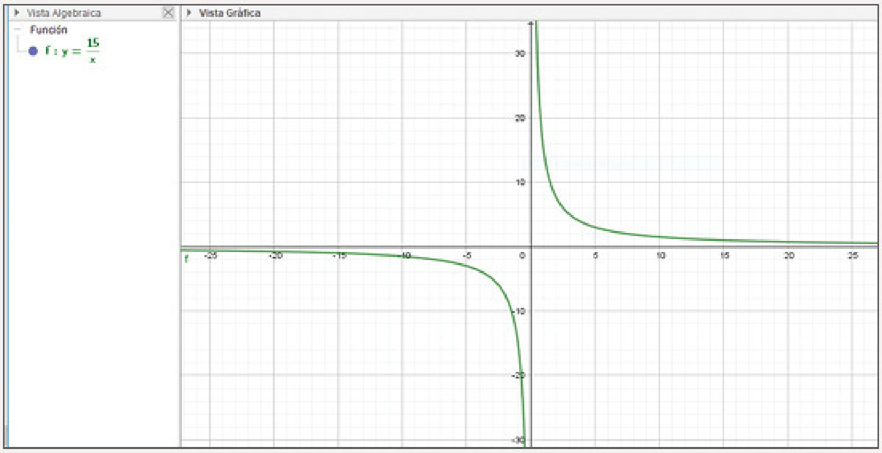
- Cuando el frente aumenta, el fondo del terreno disminuye;
- La gráfica (el fondo del terreno) disminuye lentamente para valores altos del frente, y aumenta sin límite si el frente se aproxima a cero; el frente de un terreno nunca llega a ser de cero: no tiene sentido hablar de un terreno sin dimensiones;
- Al calcular las razones de cambio entre varios pares de puntos se puede verificar que no son iguales; por ello, la línea que une los puntos solo puede ser una curva.

En este caso de los terrenos, la gráfica es una línea continua, debido a que las dimensiones de los terrenos pueden tomar cualquier valor, expresándose con números enteros, decimales, fraccionarios u otros.

Las relaciones entre cantidades que son inversamente proporcionales —como las estudiadas en esta secuencia y la anterior— tienen representaciones gráficas similares a las de las situaciones de la compra de la consola, o de la compra de terrenos. Son gráficas que se conocen como hipérbolas. Las propiedades de las hipérbolas se estudian con mayor detalle a partir de la educación media superior.

En los casos analizados en estas dos secuencias, las cantidades involucradas solo toman valores positivos debido a la naturaleza de las situaciones.

Sin embargo, en términos generales, en las hipérbolas las cantidades sí pueden tomar valores numéricos negativos. Esto se puede apreciar, por ejemplo, en la gráfica mostrada a continuación, que fue trazada utilizando GeoGebra:



Para finalizar

1. En parejas, elaboren una gráfica.

Para la situación del apartado *Recuperamos lo aprendido* de esta secuencia, ya verificaron que se trata de una relación de proporcionalidad inversa; elaboraron una tabla con varios pares de valores; obtuvieron la constante de proporcionalidad y la expresión algebraica que la representa.

- Obtengan ahora su representación gráfica. Utilicen una hoja de papel cuadriculado para localizar los puntos de la tabla siguiente:

Número de pintores	Horas que tardan en pintar el exterior del edificio
1	100
2	50
4	25
5	20
7	14.3
10	10

- Tracen a mano una línea punteada que pase por todos los puntos anteriores, que será la gráfica correspondiente a esta situación. ¿Por qué es punteada esta gráfica?

Diccionario

Ley de Boyle-Mariotte
En física, esta ley relaciona la presión y el volumen de un gas. Establece que si se mantiene constante la temperatura de una masa determinada de gas, mientras su volumen varía, la presión ejercida por el gas varía también, de tal modo que el producto de la presión por el volumen permanece constante. Como

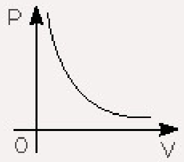
P = presión ejercida por la masa de gas

V = volumen que ocupa el gas

la expresión algebraica es

$$PV = k.$$

Presión atmosférica
La unidad de presión denominada atmósfera equivale a la presión que ejerce la atmósfera terrestre al nivel del mar. Se utiliza también para medir presiones de diferentes gases. Se abrevia como atm. La presión atmosférica decrece con la altura.



2. Resuelvan y contesten lo siguiente, aplicando lo que estudiaron en esta secuencia.

Un globo meteorológico tiene al lanzarse un volumen de 3 m^3. El globo se llena con gas hidrógeno y se lanza desde el nivel del mar.

Apliquen la **ley de Boyle-Mariotte** para encontrar el volumen del globo a las distintas altitudes indicadas en la tabla siguiente; a cada altitud se asocian los valores aproximados de la presión atmosférica. Tanto la altitud como la **presión atmosférica** son cantidades que pueden tomar valores de manera continua, por ser resultado de mediciones.

Altitud sobre el nivel del mar (m)	Presión atmosférica (atm)
0	1
500	0.942
1 000	0.887
1 500	0.834
2 000	0.785
2 500	0.737
3 000	0.692
3 500	0.649
4 000	0.608
4 500	0.570
5 000	0.533

- Verifiquen que existe una situación de proporcionalidad inversa.
- Anoten cuáles son las cantidades que están en proporción inversa y encuentren la constante de proporcionalidad. Expliquen sus respuestas. ____________________
- Escriban una expresión algebraica que sirva para representar esta situación. ____________________
- En su cuaderno, elaboren una tabla donde muestren los distintos valores de ambas cantidades y comprueben los resultados obtenidos.
- Después, tracen una gráfica en un plano cartesiano que también represente la situación del ascenso del globo meteorológico. Comprueben que se obtienen los mismos datos en cualquiera de las tres formas de representación de la relación de proporcionalidad inversa entre las cantidades. En este caso, tanto la altitud como la presión atmosférica son cantidades continuas, producto de mediciones, por lo que la gráfica con línea continua sí es una representación adecuada de la situación.
- Los globos meteorológicos aumentan de volumen a medida que suben, hasta que revientan. Este tipo de globo revienta al llegar a un volumen de 6 m^3, ¿alcanzará a subir hasta los 5 km? ____________________

- Describan las características de la gráfica, explicando su respuesta en cada caso:
  - ¿La gráfica es creciente o decreciente? ______
  - ¿Para qué valores crece más rápido y para cuáles más lentamente? ______
  - ¿Cómo es la gráfica cuando la presión tiende a cero?, ¿puede llegar a ser cero? ______

Trabaja con…

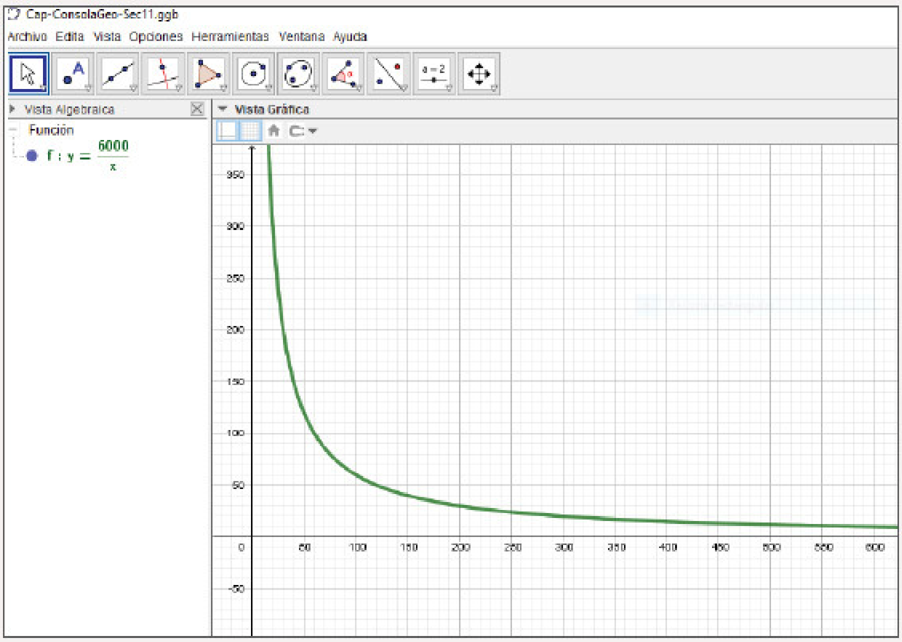
Por equipos, realicen lo siguiente:

a. Para obtener la representación gráfica de la situación de aportaciones para la consola de videojuegos por medio de una hoja de cálculo:

- introduzcan en la hoja una tabla con los datos;
- en el menú *Insertar*, seleccionen *Gráfico de dispersión con líneas suavizadas*;
- si seleccionan *Gráfico de dispersión con líneas suavizadas y marcadores*, se obtiene una gráfica donde se muestran también los puntos.

b. Para obtener la representación gráfica de la situación de aportaciones para la consola de videojuegos por medio de GeoGebra:

- en *Vista algebraica*, introduzcan $y = \frac{6000}{x}$ en la entrada; aparecen tanto la expresión algebraica en el tablero izquierdo, como la gráfica en el plano cartesiano a la derecha;
- ajusten el *zoom* hasta que se vea la gráfica; desplácenla para mover el origen hacia la esquina inferior izquierda de la pantalla; se obtiene una gráfica como la siguiente:



> Intercambien sus resultados con otros equipos.

> Comenten en plenaria y con su profesor.

Matemáticas prácticas

De manera individual resuelve los problemas. Registra tus procedimientos y respuestas.

1. ¿Cuál es el resultado del producto de $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{6}$?
   - $\frac{1}{5}$
   - $\frac{5}{11}$
   - $\frac{14}{15}$
   - $\frac{5}{30}$
2. Al dividir el número mayor entre el menor de 0.6 y 0.21, ¿cuál es el resultado?
   - 0.35
   - 2.85
   - 3.5
   - 0.285
3. ¿Cuál es el resultado del producto de 0.75 por $\frac{4}{5}$?
   - $\frac{15}{16}$
   - $\frac{5}{3}$
   - $\frac{16}{15}$
   - $\frac{3}{5}$
4. Se dividió un número entre 0.9 y el resultado fue 0.18. ¿Cuál es dicho número?
   - ____________________
5. Al modificar los signos de los números, ya sea de las bases o de las potencias, en el siguiente producto de potencias se obtuvo el menor valor. ¿Cuál es la expresión resultante?

$$(2^2)(2^3)$$

   - $(-2)^2\,(-2)^3$
   - $(-2^2)\,(-2^3)$
   - $[(-2)^{-2}]\,[(-2)^{-3}]$
   - $-[(-2)^{-2}]\,[(-2)^{-3}]$

6. ¿Cuál es el resultado del siguiente cociente de potencias: $\frac{(7^2)}{(7^3)}$?

- 7^1
- 7^5
- 7^{-1}
- 7^6

7. Lee la siguiente situación y resuelve.

En una clase de baile hay 30 alumnos entre hombres y mujeres. Los alumnos se organizaron para ir a un salón de baile a practicar sus mejores pasos pero sólo asistieron 26 alumnos. Se sabe que al baile llegaron 75% de los hombres y todas las mujeres.

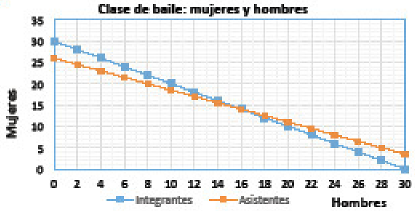
a. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en la clase de baile? ______________________

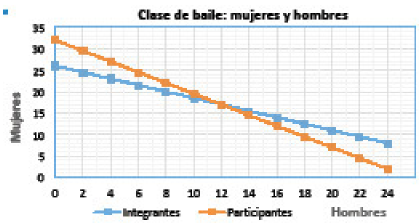
____

b. ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que resuelve el problema anterior?

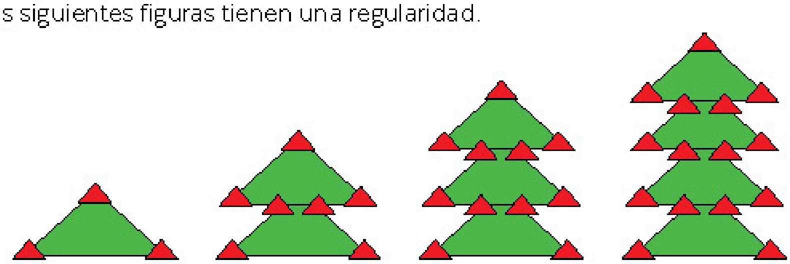
- $\begin{cases} x + y = 30 \\ x + y = 26 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y = 30 \\ 0.75x + y = 26 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y = 26 \\ 0.25x + 0.75y = 30 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y = 26 \\ 0.75x + 0.25y = 30 \end{cases}$

c. ¿Cuál es la gráfica que representa la situación anterior?

- 

- 

8. Las siguientes figuras tienen una regularidad.

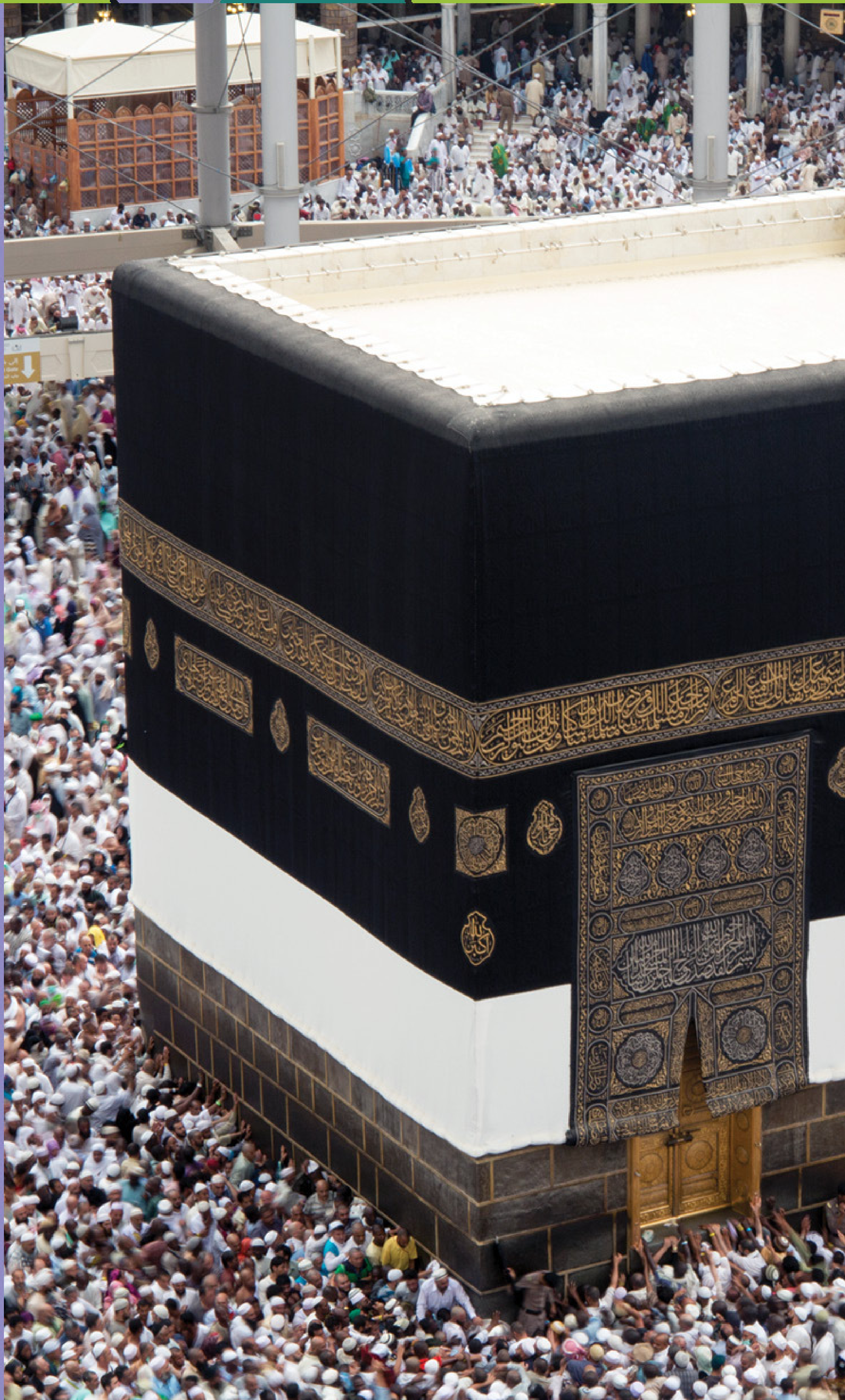


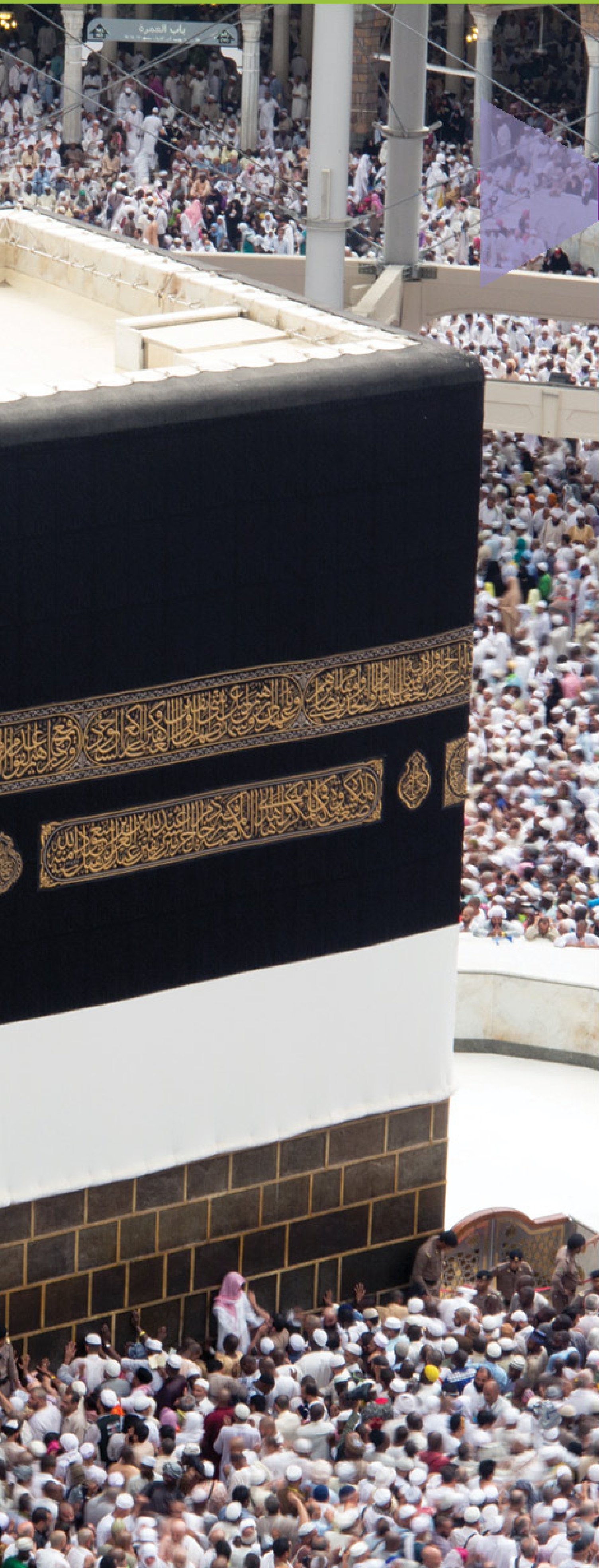
Escribe dos expresiones equivalentes que permitan calcular el número de triángulos rojos de cualquier figura de la sucesión.

Expresión 1: ______________________________

Expresión 2: ______________________________

Trimestre 2





El Masjid al-Haram es la mezquita más importante de la ciudad de La Meca y es una de las construcciones más grandes y majestuosas hechas por el hombre. Tiene forma de cuadrado con una superficie de más de 320 000 m^2, lo cual significa que por lado tiene cerca de 566 m, aproximadamente lo que miden 5 canchas de futbol por lado, y en su interior se encuentra otra construcción llamada Kaaba (el cubo) la cual tiene casi la forma de un cubo.

La mezquita, en realidad, es un prisma rectangular que ocupa una superficie de 130.0673 m^2, mide 10.67 m de frente, 12.19 m de lado y 15.24 m de altura, y tiene un volumen de 1 982.225652 m^3, esto quiere decir que si la mezquita se llenará de agua, le cabrían aproximadamente 2 000 000 de litros.

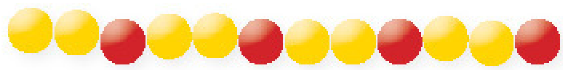
12 De *n* en *n*

En esta secuencia aprenderás la equivalencia de expresiones de primer grado a partir de sucesiones.

Recuperamos lo aprendido

1. **En parejas lean y resuelvan.**

Leslie y Julio hacen joyas de fantasía para ayudar con los gastos de su casa y están elaborando collares. El diseño que están haciendo, incluye dos colores como el que se presenta en la figura:



- En su cuaderno, describan el arreglo de las cuentas en el collar.
- Si el collar tiene 60 cuentas, ¿cuántas serán de cada color? ________________
- Si el collar llevará 100 cuentas, ¿cuántas serán de cada color? ¿La secuencia de colores concluirá como en la figura? ¿Por qué? ________________
- Para que los collares tuvieran de principio a fin la secuencia que se marca, ¿cuántas cuentas deben poner en cada collar? Expliquen su respuesta. ________________

> **Comparen sus respuestas y estrategias con las de otras parejas.**

Construyo algo nuevo

1. **Trabajen en equipos.**

Observen la siguiente sucesión de números que se formó cuando Leslie contaba los collares que hizo:

2, 4, 6, 8, 10, ...

- ¿Cuál número sigue en la sucesión? ________________
- ¿Cuál número ocupa la primera posición? ________________
- ¿La sucesión va creciendo o decreciendo? ________________
- ¿Cuál número aparecería en la posición número 12? ¿Por qué? ________________

- ¿Qué número ocupará la posición 30?, ¿y cuál la posición 86?, ¿y cuál la posición *n*?
- ¿Qué significa posición *n*?, ¿Qué representa la *n*?
- Describan el patrón o regla que sigue la sucesión. Escriban una expresión algebraica que la represente.
- ¿El número 35 aparecerá en la sucesión? ¿Por qué?

> **Compartan con otros equipos sus respuestas y estrategias.**

2. Continúen con los mismos equipos.

a. Observen nuevamente la sucesión:

2, 4, 6, 8, 10, ...

- ¿Cuánto aumentó o disminuyó el valor del segundo número de la sucesión con respecto al primero?
- ¿Y el tercero con respecto al segundo?
- ¿Y el cuarto con respecto al tercero?
- ¿Aumenta o disminuye siempre lo mismo?
- ¿Qué relación observas del primer número de la sucesión con respecto al número de posición que ocupa? Analiza esto completando la siguiente tabla:

Números de la sucesión	2	4	6	8	10							
Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	*n*

- ¿Cómo operan al 1, de manera tal que dé como resultado 2? Subrayen la respuesta correcta:
  - Al 1 le sumamos 1 y da 2
  - Al 1 le sumamos −3 y da 2
  - Al 1 lo multiplicamos por 2 y da 2
  - Al 1 le restamos 1, lo multiplicamos por 2 y le sumamos 2 y da 2
- ¿La operación que eligieron como correcta funciona para la posición 2 y para la 3? Expliquen su respuesta.

- Subrayen la respuesta correcta para la posición 2.
  - Al 2 le sumamos 1 y da 4
  - Al 2 le sumamos −3 y da 4
  - Al 2 lo multiplicamos por 2 y da 4
  - Al 2 le restamos 1, lo multiplicamos por 2 y le sumamos 2 y da 4
- Subrayen la respuesta correcta para la posición 3.
  - Al 3 le sumamos 1 y da 6
  - Al 3 le sumamos −3 y da 6
  - Al 3 lo multiplicamos por 2 y da 6
  - Al 3 le restamos 1, lo multiplicamos por 2 y le sumamos 2 y da 6
- Subrayen las reglas que definen la sucesión y, para comprobarla, sustituyan la n por los términos 4, 5, 7 y 10, y vean si los resultados corresponden a los números de la sucesión. X_n corresponde al término en n, y n al número de término.
  - $X_n = n + 1$
  - $X_n = n - 3$
  - $X_n = 2 * n$
  - $X_n = 2 + 2(n - 1)$

b. Si Leslie hubiera contado los collares como lo muestra la sucesión:

3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

- ¿La regla anterior hubiera funcionado? ¿Por qué? ______________________________
____
- Completen la regla para que funcione para la última sucesión.

$$X_n = 2 * n \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Sustituyan la n por los términos 4, 5, 7 y 10, y vean si los resultados corresponden a los números de la sucesión.

> **Comparen con las de otros equipos sus respuestas y estrategias.**

3. Trabajen en equipos de tres integrantes.

Julio cuenta unos pasadores para el pelo que elaboró de la siguiente forma:

6, 9, 12, 15, 18, ...

- Subrayen las reglas que definen la sucesión:
  - $X_n = 2n + 5$
  - $X_n = 3(n + 1)$
  - $X_n = 3n + 3$
- ¿Cuáles de las respuestas anteriores son correctas? ______________________________
- Escriban en su cuaderno por qué son o no correctas las tres reglas anteriores.

Recursos de interés

Entren a la siguiente dirección electrónica y practiquen sobre expresiones equivalentes.
https://bit.ly/2nUlAvf

Leslie le dice a Julio que está contando unos botones y que la regla de conteo es $X_n = 2n + 8$.

- ¿Cuál es la sucesión de conteo de Leslie? ______

Julio le dice que la regla de conteo también puede ser $X_n = 2(n + 4)$

- ¿Tiene razón Julio? ¿Por qué? ______
- Prueben ambas reglas y digan si producen los mismos resultados, expliquen si son o no equivalentes y porqué. ______

______

> Comenten con otros equipos sus respuestas y estrategias.

Hagamos una reflexión

Las sucesiones de números pueden describirse con una expresión algebraica general que nos permita obtener cualquier término que pertenezca a ella.

Dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando se cumple la igualdad entre ambas expresiones y se puede comprobar numéricamente cuando se le asigna cualquier valor a las literales que intervienen.

- Una expresión algebraica que genera una sucesión es **equivalente** a otra expresión algebraica si generan la misma sucesión. Por ejemplo:

  Regla general: $2n$
  Sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

  Regla general: $2 + 2(n - 1)$
  Sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

- Una expresión algebraica es **equivalente** a otra expresión algebraica si se puede transformar una en la otra mediante operaciones algebraicas válidas. Por ejemplo:

$$(n + 1) + 2(n - 2) = n + 1 + (n - 2) + (n - 2) = n + 1 + n - 2 + n - 2 = 3n - 3$$
$$\text{Entonces } (n + 1) + 2(n - 2) = 3n - 3$$

Cuando se tienen dos expresiones equivalentes que generan una misma sucesión y se igualan ambas expresiones entre sí, se llega a una **identidad**, la cual es una ecuación en la que cada lado de la igualdad genera la misma sucesión de números.

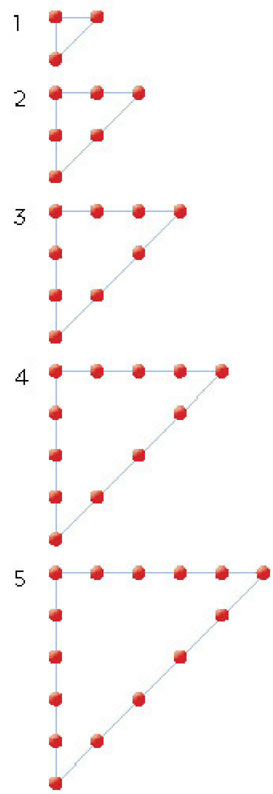
Algunas identidades que surgieron en la lección, son las siguientes:

$2n = 2 + 2(n - 1)$ $3(n + 1) = 3n + 3$ $2n + 8 = 2(n + 4)$

Para finalizar

1. Trabajen en parejas. Resuelvan los ejercicios en su cuaderno.

- Escriban dos expresiones algebraicas equivalentes que representen el arreglo de cuentas a su derecha.
- Escriban dos secuencias de números y después dos reglas algebraicas equivalentes que definan cada una.
- Transformen algebraicamente una de las expresiones para llegar a la otra.



> Comparen sus respuestas y estrategias con las de otras parejas.
> Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

Secuencia

Eje: Número, álgebra y variación
Tema: Patrones, configuraciones geométricas y expresiones equivalentes

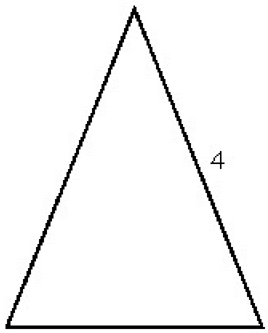
13 Perímetros y álgebra

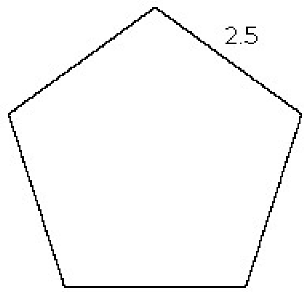
En esta secuencia aplicarás tus conocimientos sobre expresiones algebraicas para representar perímetros y áreas de figuras geométricas

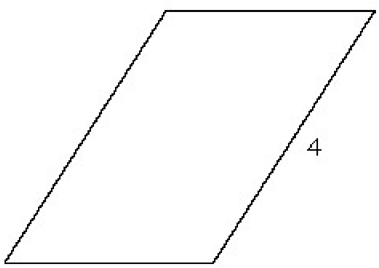
Recuperamos lo aprendido

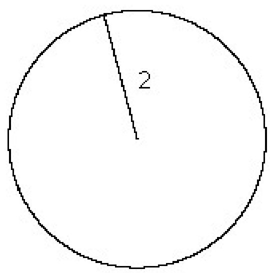
1. En parejas, realicen lo que se indica.

- Escriban dos formas de calcular el perímetro de cada polígono.









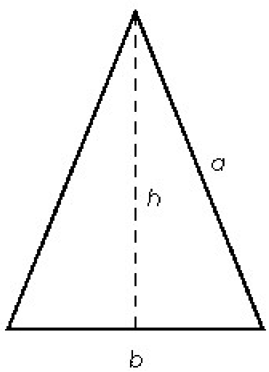
- ¿Los procedimientos cambian si la medida de los lados o del radio cambian? ¿Por qué? ______________________

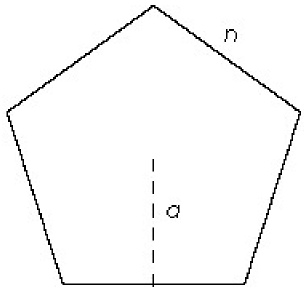
› Comparen sus respuestas con las de otras parejas.

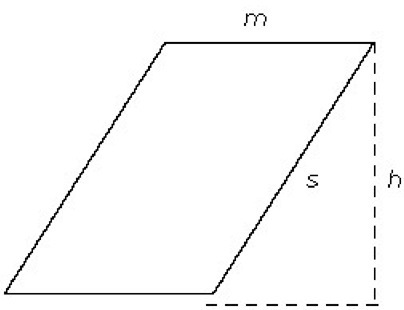
Construyo algo nuevo

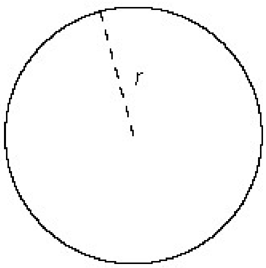
1. Trabajen en parejas.

- Escriban dos formas de calcular el perímetro de cada polígono.









> Comparen sus respuestas y estrategias con las de otros equipos.

2. Continúen con los mismos equipos y contesten.

- Expresen como multiplicación la suma 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4.
- Expresen como multiplicación la suma $m + m + m + m + m + m + m + m + m$.
- Expresen como suma $6x$.

- ¿Cómo se expresa algebraicamente el doble de un número? ____________
- ¿Cómo se expresa algebraicamente el triple de un número? ____________
- ¿Cómo se expresa algebraicamente la mitad de un número? ____________
- ¿Cómo se expresa algebraicamente la mitad de la suma de dos números? ____________
- Escriban en forma algebraica las siguientes expresiones.
  - Lado más lado más lado más lado: ____________
  - Multiplica lado por lado: ____________
  - Elevar al cuadrado el valor del lado: ____________
  - Multiplica el valor del lado por siete: ____________

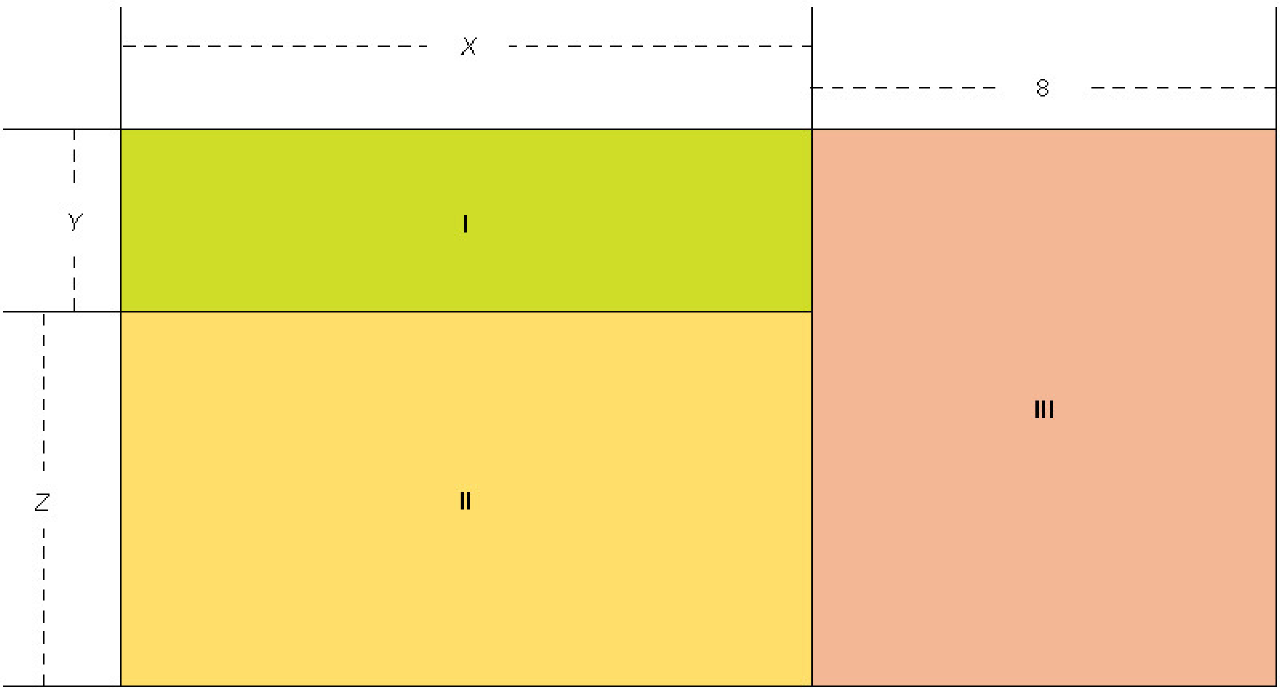
Recuerden que las literales usadas en expresiones algebraicas pueden tomar diferentes valores numéricos.

> **Comparen sus respuestas y estrategias con las de otros equipos.**

3. En equipos de tres integrantes resuelvan el siguiente problema.

De acuerdo con los datos de la figura, ¿cuál es la expresión algebraica que representa el perímetro de cada rectángulo y cuál es la expresión algebraica que representa el perímetro del rectángulo mayor?

- Escriban sus expresiones algebraicas en la primera tabla, en la segunda tabla escriban una expresión algebraica equivalente a la de la primera, y en la tercera tabla corroboren sus expresiones dando el valor que deseen a cada literal.



	I	II	III	Rectángulo mayor
Perímetro				

	I	II	III	Rectángulo mayor
Perímetro				

	I	II	III	Rectángulo mayor
Perímetro				
Perímetro				

- Comparen sus respuestas y estrategias con las de otros equipos.

Hagamos una reflexión

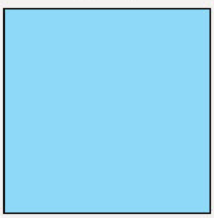
Las literales en el álgebra representan números. En ocasiones representan un número general, es decir, cualquier número; también a veces representan un solo número o incógnita, depende del contexto en que se encuentren.

En las fórmulas que generalizan los procedimientos para determinar el perímetro y área de las figuras geométricas, no importa el valor que tenga la medida de los lados de una figura, el procedimiento es el mismo, y las fórmulas corresponden a un procedimiento general para calcularlos.

Si dos expresiones distintas permiten calcular el mismo perímetro, entonces son **expresiones algebraicas equivalentes**.

Por ejemplo, en el caso del cuadrado:

$L = 4$



$$P = L + L + L + L = 16$$

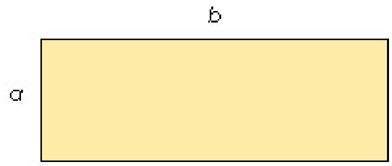
$$P = L \times 4 = 16$$

$$P = 4L = 16$$

Es decir, las tres fórmulas para el cálculo del perímetro son equivalentes.

4. En parejas, analicen y contesten.

La fórmula P = $a + a + b + b$ nos permite calcular el perímetro de un rectángulo. Observen la figura:



Contesten:

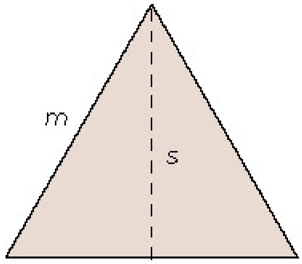
- ¿Qué representa *a*? ____________________
- ¿Qué representa *b*? ____________________
- ¿Qué representa P? ____________________
- ¿Por qué no se representan los lados del rectángulo con una sola literal? ____________________
- Escriban otra forma de calcular el perímetro del rectángulo. ____________________

> **Comparen con las de otras parejas sus respuestas y conclusiones.**

Para finalizar

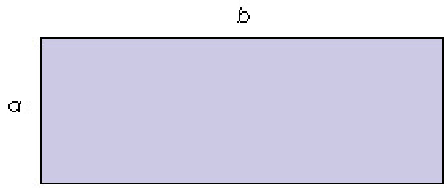
1. Trabajen en parejas y resuelvan lo que pide.

a. En el siguiente triángulo equilátero:



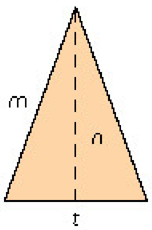
- ¿Qué representa la *m*? ____________________
- ¿Qué representa la *s*? ____________________
- ¿Qué valores pueden tomar *m* y *s*? ____________________
- ¿Cuáles de las siguientes expresiones sirven para calcular su perímetro?
  - $m \times 3$
  - $m + m + m$
  - $3m$
  - $m + 3$

b. En el siguiente rectángulo:

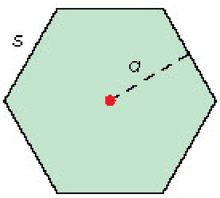


- ¿Cuáles de las siguientes expresiones sirven para calcular su perímetro?
  - $a + a + b + b$
  - ab
  - $2a + 2b$
  - $b \times a$
  - $2(a + b)$

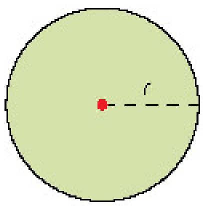
c. Expresa las fórmulas del perímetro de las siguientes figuras utilizando las literales, y escribe lo que representa cada literal en cada fórmula. Después, calcula el perímetro con los valores dados.



$m = 2.4$ u
$t = 1.74$ u
$n = 2.24$ u



$a = 5.2$ u
$s = 6$ u



$r = 2.5$ u

> Comparen con las de otras parejas sus respuestas y estrategias.

> Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

Recursos de interés

Entren a la dirección electrónica que aparece enseguida, y practiquen nuevamente sobre expresiones equivalentes: https://bit.ly/2nUIAvf

Si tienen dudas sobre las expresiones algebraicas equivalentes, entren en la siguiente dirección electrónica: https://bit.ly/2Ko48sP

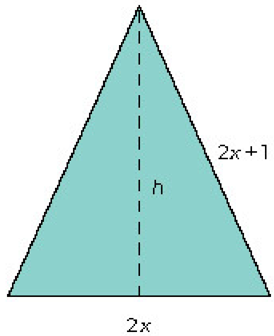
14 De ambas formas lo mismo

En esta secuencia aplicarás tus conocimientos sobre expresiones algebraicas para representar áreas de figuras geométricas.

Recuperamos lo aprendido

1. **Trabajen en parejas.**

   Escriban una expresión algebraica que represente el perímetro del siguiente triángulo isósceles.



> **Comparen su respuesta con las de otras parejas.**
- ¿Son todas las respuestas iguales? ¿Por qué? ______________________

Construyo algo nuevo

1. **Trabajen en equipos.**

   Pamela ha conseguido unas tablas de madera con las que puede elaborar diferentes tamaños de puertas. Cada tabla tiene las siguientes dimensiones:

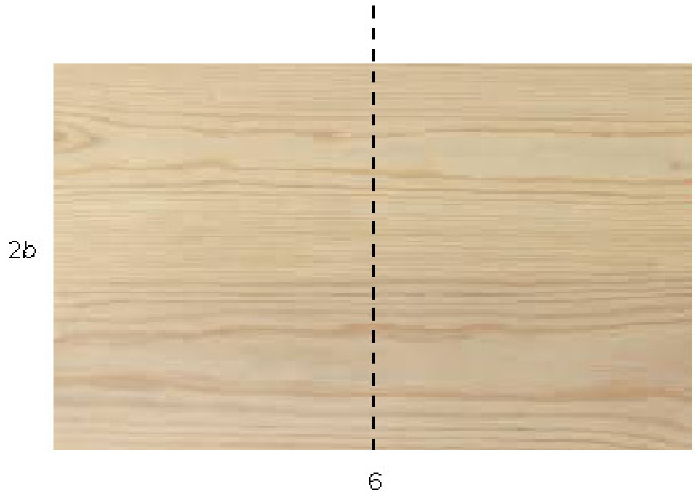
- Escriban una expresión algebraica para representar el área. ______________
- Si Pamela quiere elaborar dos puertas del mismo tamaño de la tabla, ¿cuáles serían las dimensiones de cada tabla? ______________
- Escriban una expresión algebraica para el área de cada tabla. ______________
- ¿Si la corta en cuartos cómo representan el área de cada cuarto? ______________

> Comparen sus respuestas con las de otros equipos.

- ¿Las respuestas fueron iguales? ¿Por qué? ______________

2. Continúen con los mismos equipos. Resuelvan lo que indica.

- Si la tabla se parte en dos con respecto al largo, ¿qué dimensión tendrá cada mitad? ______________

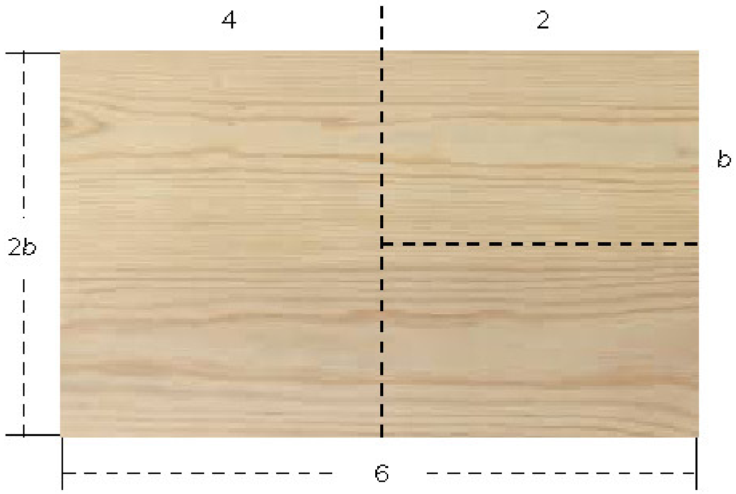


- Escriban una expresión que represente que la suma del área de las dos partes resultantes es igual al área de la tabla completa. ______________
- Comprueben que son correctas sus expresiones dando algún valor a las variables. ______________

____
- Escriban una expresión algebraica que indique el área de cada mitad, si se corta por lo ancho. ______________
- Escriban una expresión que represente que la suma del área de las dos partes resultantes es igual al área de la tabla completa. ______________
- Comprueben que son correctas sus expresiones dando algún valor a las variables. ______________

____

- ¿Cuál será el área de las partes resultantes si se corta la tabla de la siguiente manera? ____________________



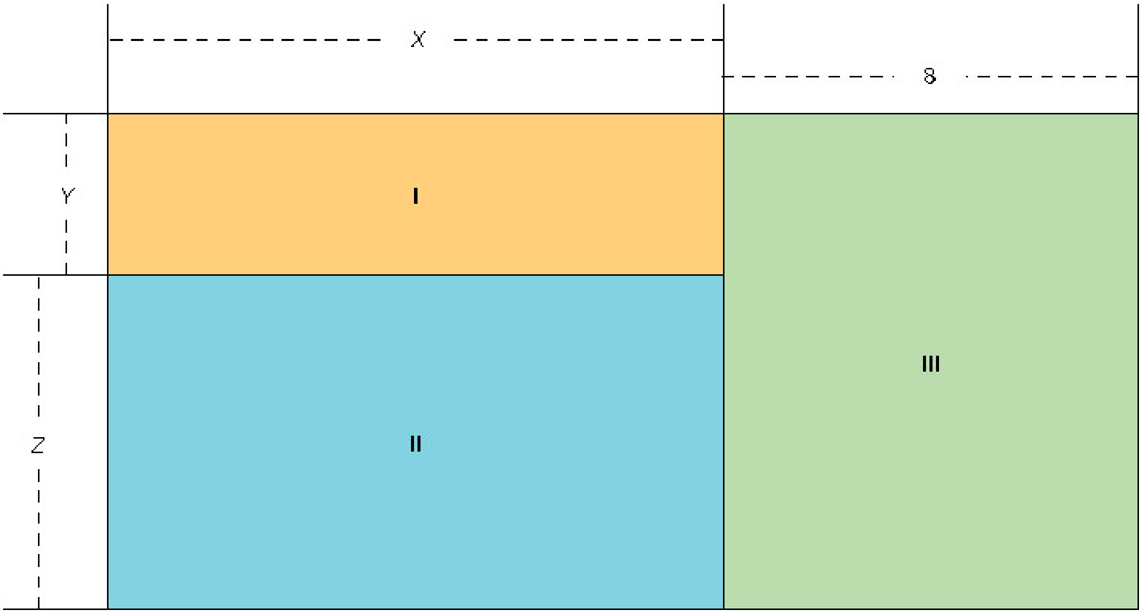
> Comparen sus respuestas con las de otros equipos.

- ¿Las respuestas fueron iguales? ¿Por qué? ____________________

3. **En equipos de tres integrantes resuelvan el siguiente problema.**

De acuerdo con los datos de la figura, ¿cuál es la expresión algebraica que representa el área de cada rectángulo y cuál es la expresión algebraica que representa el área del rectángulo mayor?

Escriban sus expresiones algebraicas en la primera tabla, en la segunda tabla escriban otra expresión algebraica equivalente y en la tercera tabla corroboren sus expresiones dando el valor que deseen a cada literal.



	I	II	III	Rectángulo mayor
Área				

	I	II	III	Rectángulo mayor
Área				

	I	II	III	Rectángulo mayor
Área				
Área				

- Comparen sus respuestas y estrategias con las de otros equipos.

Hagamos una reflexión

Si dos expresiones distintas permiten calcular la misma área, entonces son expresiones algebraicas equivalentes.

Dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando se cumple la igualdad entre ambas y se puede comprobar numéricamente cuando se le asigna cualquier valor a las variables que intervienen.

Por ejemplo:

$$ab + ac = a(b + c)$$

Estas dos expresiones son equivalentes porque cualesquiera que sean los valores que se le asignen a las variables a, b y c, se cumple la igualdad numérica.

Así, para $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$:

$$ab + ac = 1 \times 2 + 1 \times 3 = 2 + 3 = 5$$

$$a(b + c) = 1(2 + 3) = 1 \times 5 = 5$$

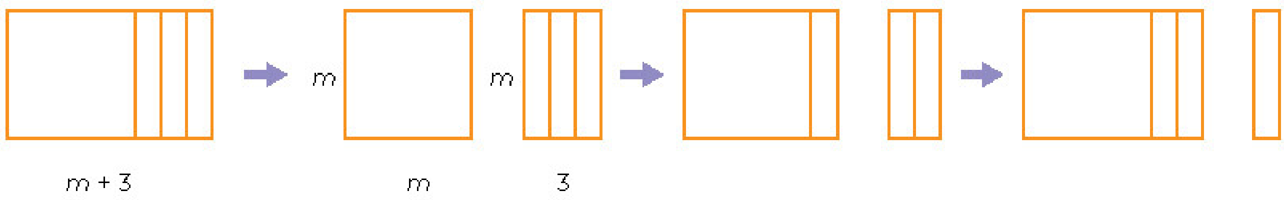
- En equipos, propongan otros valores y comprueben que se cumplen las igualdades anteriores.

A las expresiones algebraicas equivalentes se les llama **identidades algebraicas**.

Para finalizar

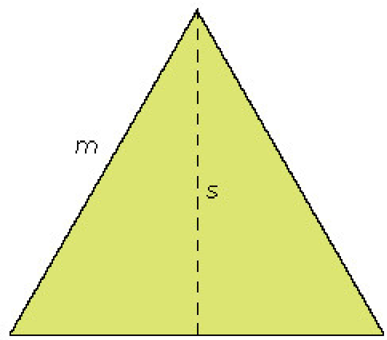
1. Resuelve individualmente.

a. Completa el siguiente modelo geométrico y determina las expresiones equivalentes del área:



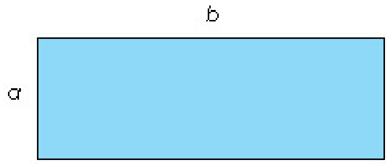
$m(m+3)$ = ______________ = ______________ = ______________

b. En el siguiente triángulo equilátero:



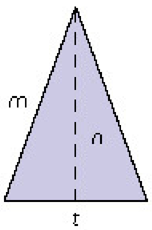
- ¿Qué representa la m? ______________________________
- ¿Qué representa la s? ______________________________
- ¿Qué valores pueden tomar m y s? ______________________________
____
- ¿Cuáles de las siguientes expresiones sirven para calcular su área?
  - $m \times 3$
  - $m + m + m$
  - $\frac{sm}{2}$
  - $\frac{ms}{2}$
- Mide el triángulo y calcula su área con una de las fórmulas que determinaste que sirve para hacerlo. ______________________________

c. En el siguiente rectángulo:

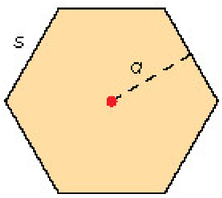


- ¿Cuáles de las siguientes expresiones sirven para calcular su área?
  - $a + a + b + b$
  - ab
  - $2a + 2b$
  - $b \times a$
  - $2(a + b)$

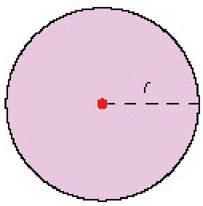
d. Expresa las fórmulas del área de las siguientes figuras utilizando las literales, y escribe lo que representa cada literal en cada fórmula. Después, calcula el área con los valores dados.



$m = 2.4$ u
$t = 1.74$ u
$n = 2.24$ u



$a = 5.2$ u
$s = 6$ u



$r = 2.5$ u

> Compara con otros compañeros y compañeras tus respuestas y estrategias.

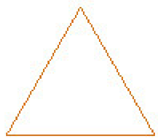
> Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

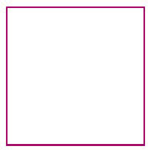
15 Los polígonos y sus diagonales

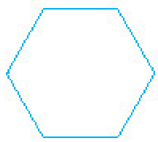
En el curso pasado, aprendiste a trazar diferentes polígonos; ahora aprenderás cuántas diagonales se les pueden trazar desde un vértice y cuántas en total.

Recuperamos lo aprendido

1. En parejas, escriban el nombre de los polígonos y algunas de sus características.



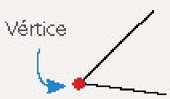




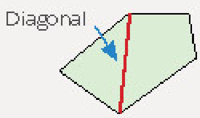
Comparen sus respuestas con las de otras parejas y comenten si escribieron algo más, además del número de **vértices**, de lados, de mediatrices, de ángulos y nombres de los polígonos.

Diccionario

Vértice
Punto en que concurren los dos lados de un ángulo (RAE).



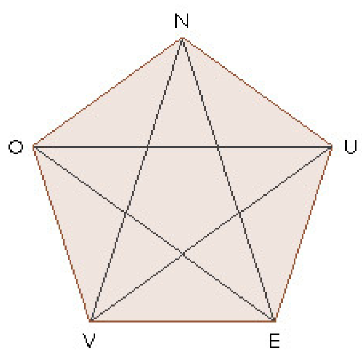
Diagonal
Segmento que une dos vértices no consecutivos.



Construyo algo nuevo

1. En equipos de tres resuelvan el siguiente problema.

En el polígono llamado NUEVO se trazaron sus **diagonales**, analícenlas y anoten en su cuaderno lo que encontraron al respecto.

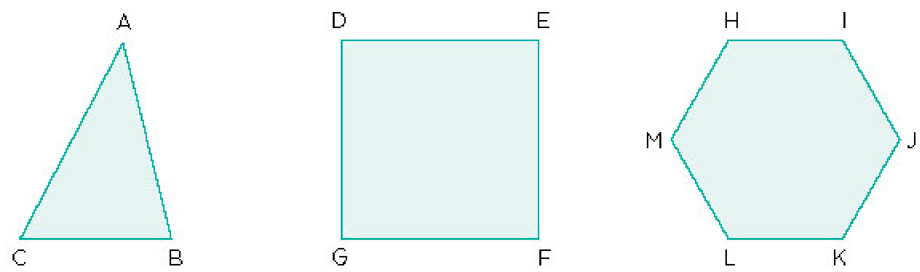


- ¿En cualquier polígono pasará lo mismo que observaron? ¿Por qué? ____________
- ¿Cuántas diagonales contaron por vértice? ____________
- ¿El total de diagonales del polígono será igual al número de vértices por el número de diagonales por vértice? ____________
- ¿Habrá una estrategia para saber cuántas diagonales tiene en total? ____________

> Comenten con otros equipos sus estrategias y resultados. En caso de discrepancias expongan sus dudas en el grupo.

2. **Continúen con el mismo equipo; investiguen y respondan.**

- Investiguen cuántas diagonales se pueden trazar por vértice y cuántas en total en los siguientes polígonos, escriban debajo de cada figura geométrica sus respuestas.



- ¿Cuántas diagonales trazaron en el triángulo? ¿Por qué? ____________
- ¿Cuántas en el cuadrado? ¿Cuántas por vértice? ____________
- ¿Cuántas en el hexágono? ¿Cuántas por vértice? ____________
- ¿Cuántas en el polígono llamado NUEVO? ¿Cuántas por vértice? ____________

> Escriban en su cuaderno sus conclusiones. Intercambien opiniones con otros equipos.

3. **En equipos, elaboren una tabla y respondan.**

a. Organicen en una tabla la información sobre el número de vértices, de diagonales que se pueden trazar por el vértice y el total de diagonales de los siguientes polígonos: triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono, polígono de *n* lados.

b. Con base en la información de la tabla, contesten.

- ¿Cómo va creciendo el número de diagonales que se pueden trazar por vértice? ____________________
- ¿Cuántos vértices toca cada diagonal? ____________________
- ¿Cómo se puede calcular el número de diagonales que parten de un vértice en un polígono de 10 lados? ____________________
- ¿Cómo se puede calcular el número total de diagonales en un polígono de 10 lados sin contar dos veces la misma diagonal? Escriban una expresión algebraica que indique el número de diagonales que se pueden trazar por vértice en un polígono.

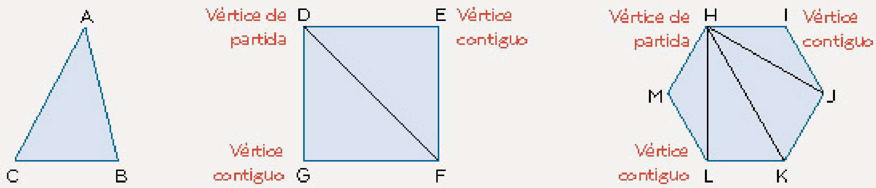
  Diagonales desde un vértice = ____________________

  D = ____________________

> **Comprueben sus respuestas. Expongan su trabajo en el grupo y escuchen con atención y respeto la exposición de otros equipos, en caso necesario, intervengan para aclarar lo que se dice.**

Hagamos una reflexión

En los **polígonos convexos** (con ángulos interiores menores a 180°), una diagonal toca dos vértices, pero no los contiguos ni al mismo vértice de partida, por lo que se restringen 3 vértices: el vértice del que parte la diagonal y los dos contiguos.



En el triángulo A,B,C no se pueden trazar diagonales porque al tomar un vértice de referencia los otros son contiguos, en el cuadrado sólo se puede trazar una diagonal desde cada vértice, ya que al tomar de referencia el vértice D, los vértices E y G son contiguos.

El total de **diagonales que se pueden trazar desde un vértice** en un polígono, se puede calcular con la fórmula:

Diagonales desde un vértice = Número de lados del polígono – tres

$$D_v = n - 3$$

Para calcular el **total de diagonales** de un polígono, la fórmula es:

Diagonales totales = Número de lados x (número de lados del polígono – tres)/dos

$$D_t = \frac{n(n-3)}{2}$$

4. Comenten en equipo y respondan las preguntas.

a. Expliquen si las diagonales que parten del vértice H en el hexágono de *Hagamos una reflexión* hacia los vértices J,K,L son las mismas que JH, KH y LH. ____________________

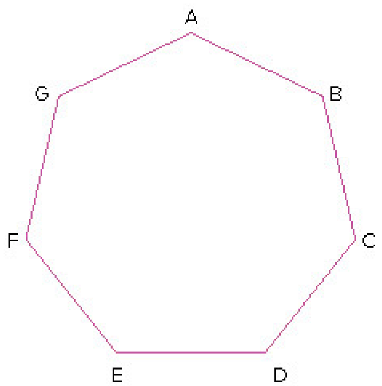
____

b. Expliquen por qué en la fórmula para calcular el total de diagonales de un polígono, se divide entre 2. ______________________________

____

____

c. Escriban cuántas diagonales se pueden trazar por vértice en cada uno de los siguientes polígonos y cuántas en total. Después tracen las diagonales para comprobar sus respuestas.

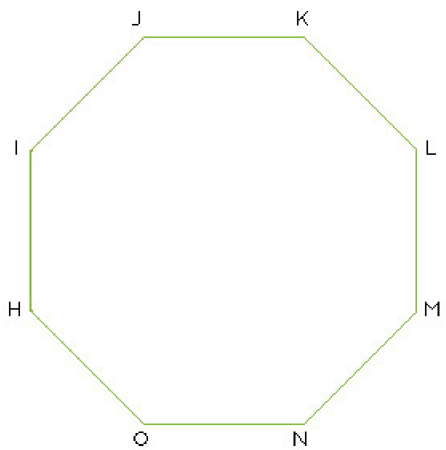


____

____

____

____



____

____

____

____

> Expongan sus dudas y comentarios ante el grupo. Escuchen con atención a sus compañeros y de ser necesario aporten ideas para hacer más claro el conocimiento.

Para finalizar

1. **Retomen el problema de la actividad 1 del apartado *Construyo algo nuevo*, y verifiquen sus respuestas.**

2. **En equipos de tres resuelvan lo siguiente.**

   - Por turnos indiquen a un integrante del equipo un número de lados de un polígono convexo, para que les indique cuántas diagonales se pueden trazar por vértice.

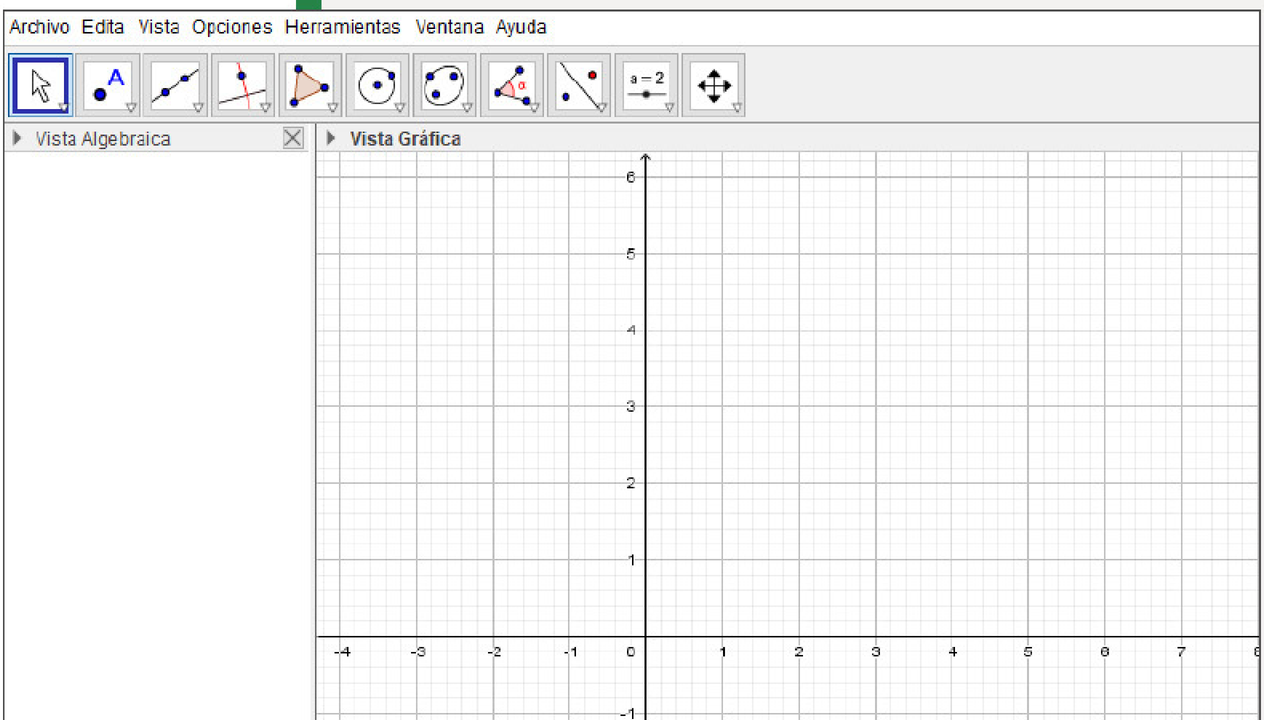
- Por turnos indiquen a un integrante del equipo un número de diagonales que parten de un vértice, para que les indique cuántos lados tiene el polígono.
- Por turnos indiquen a un integrante del equipo un número de lados de un polígono convexo, para que les indique cuántas diagonales tiene en total.
- Por turnos indiquen a un integrante del equipo un número de diagonales que tiene en total un polígono convexo, para que les indique cuántos lados tiene el polígono.
- ¿Cuántas diagonales parten de cada vértice en un decágono? ____________
- ¿Cuántas diagonales tiene en total un decágono? ____________
- ¿En qué polígono se pueden trazar 4 diagonales por vértice? ____________
- ¿Cuál polígono tiene 14 diagonales en total? ____________
- ¿Cuál es la fórmula para calcular en un polígono las diagonales que parten de un vértice? ____________
- ¿Cuál es la fórmula para calcular en un polígono el total de las diagonales que se le pueden trazar? ____________

› Comparen sus respuestas con otros equipos.

Trabaja con...

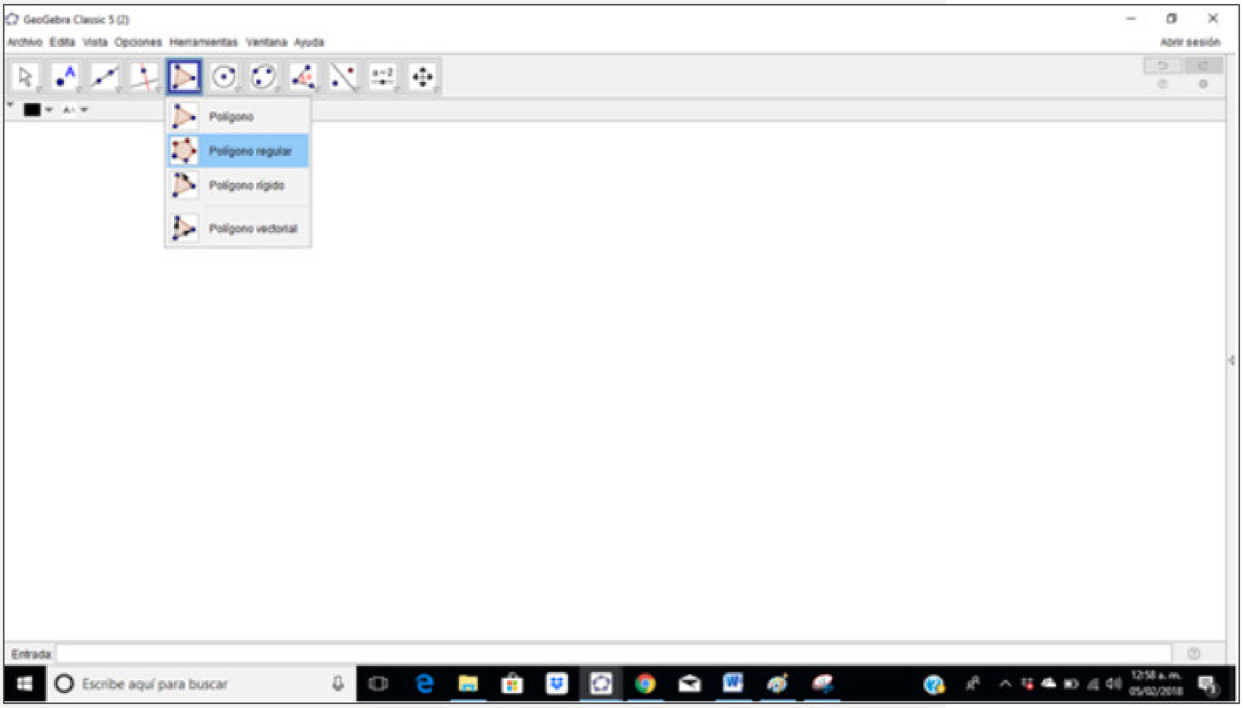
En equipos abran GeoGebra.

Recuerden que pueden descargar GeoGebra gratis en español de la página https://bit.ly/1bxFws3



Cierren la cuadrícula, los ejes de coordenadas y la vista algebraica.

Elige la opción de polígono regular y traza los polígonos necesarios para resolver las preguntas de la actividad 2 del apartado *Finalizar*.



- En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.
- Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

16 Los polígonos y sus ángulos

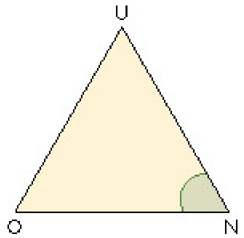
Ya trazaste las diagonales a polígonos, ahora conocerás la forma de calcular la suma de sus ángulos interiores, la identificación y medida de sus ángulos interiores, exteriores y ángulo central, y la relación que hay entre sus ángulos central, interior y exterior.

Recuperamos lo aprendido

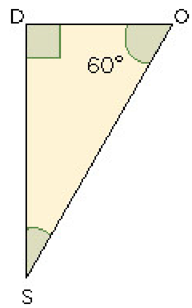
1. En parejas resuelvan lo siguiente.

Diana dice que en algunos casos es posible deducir la medida de ángulos, si se conocen algunos datos.

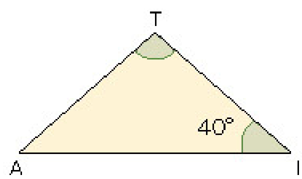
- Escriban la medida de los ángulos internos de cada triángulo e indiquen si se trata de un ángulo agudo, un ángulo recto o un ángulo obtuso. Justifiquen su respuesta.



Triángulo equilátero



Triángulo rectángulo



Triángulo isósceles

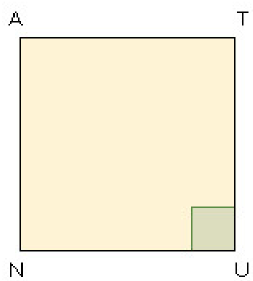
Ángulo UNO = ___________ Porque ______________________________

Ángulo OSD = ___________ Porque ______________________________

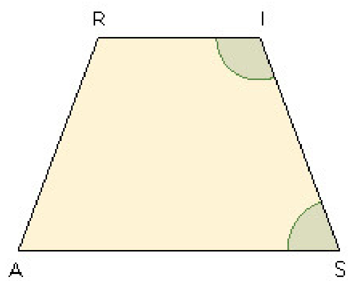
Ángulo ATI = ___________ Porque ______________________________

- ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cualquier triángulo? ___________

2. Usa tu transportador y escribe la medida de cada uno de los ángulos interiores de cada cuadrilátero y su suma.



Cuadrado



Trapecio isósceles

Ángulo TUN = ____________ Porque ______________________________

Ángulo RIS = ____________ Porque ______________________________

- ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero convexo? ________

> **Comparen sus estrategias y respuestas con las de otras parejas.**

Construyo algo nuevo

1. **En equipos de tres resuelvan el siguiente problema.**

Isaac, Mary y Belén compiten a sumar los ángulos interiores de polígonos convexos, por lo que primero deben medirlos para después sumarlos.

Belén encontró una estrategia para saber la suma sin medirlos y sin verlos, el único requisito es saber el número de lados del polígono.

- ¿Habrá una estrategia que esté usando Belén? ______________________
- Intercambien ideas al interior del equipo y, después, con otros equipos para saber cómo lo hace Belén y prueben sus **hipótesis**.

Diccionario

Hipótesis
Suposición de algo posible o imposible para sacar de ello una consecuencia (RAE).

> **Escuchen atentamente las opiniones de los equipos para que complementen sus ideas.**

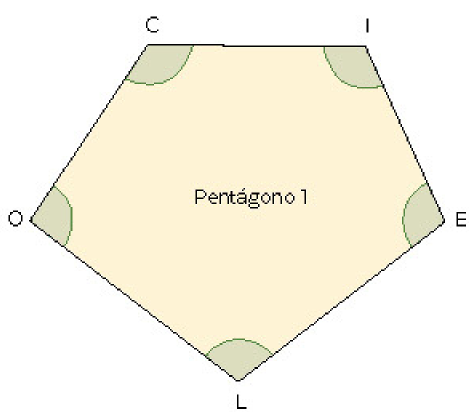
2. **En equipos, lean y resuelvan.**

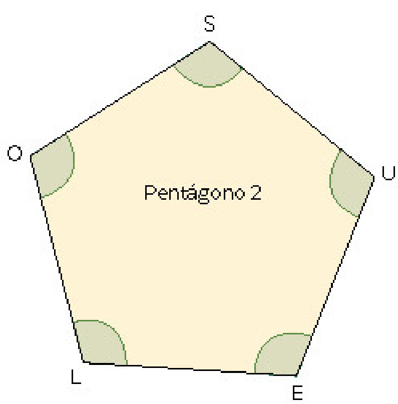
a. En los triángulos y en los cuadriláteros convexos hay una constante en la suma de sus ángulos interiores. ¿Tendrá que ver con la estrategia de Belén?

____

____

b. Midan con cuidado los ángulos interiores, saquen un promedio de medición del grupo y escriban en la tabla de la página siguiente la medida de cada pentágono y su suma (debe ser de 540°). Respondan las preguntas.





	Pentágono 1					Pentágono 2				
Ángulos										
Medida										
Suma										

- ¿Hay alguna constante en la suma de sus ángulos interiores? ______
  ¿Por qué? ______
- ¿Pasará lo mismo con cualquier pentágono? ______

c. Encuentren alguna regularidad y contesten.

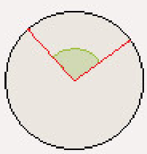
- ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cualquier triángulo? ______
- ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero convexo?
  ______
- ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cualquier pentágono convexo?
  ______
- ¿Cómo va aumentando la suma de la medida de los ángulos interiores de los polígonos? ______
- ¿Cuánto sumarán los ángulos interiores de un hexágono? ¿Por qué?
  ______
- ¿Cuánto sumarán las medidas de los ángulos interiores de un ´heptágono? ¿Por qué? ______
- ¿Cuánto sumarán las medidas de los ángulos interiores de un polígono con *n* número de lados? ¿Por qué? ______
- ¿Con cuál de las siguientes expresiones se calcula la suma de los ángulos interiores de un polígono con *n* número de lados?

  $180(n)$ $\qquad$ $180(n-2)$ $\qquad$ $180(n+2)$

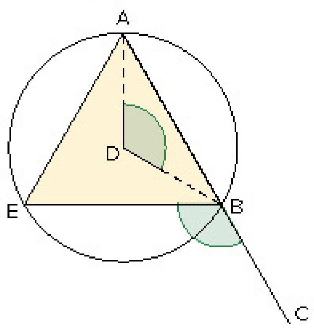
d. ¿Cuál fue la estrategia que usó Belén? ______
______

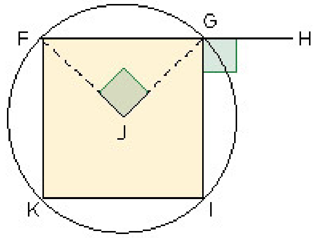
Diccionario

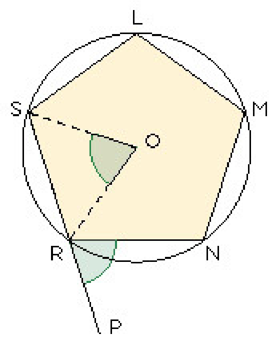
Ángulo central
Es aquel formado con dos radios.



3. En equipos, investiguen cuánto suman los ángulos centrales y los externos en: un triángulo equilátero, un cuadrado y en un pentágono regular.





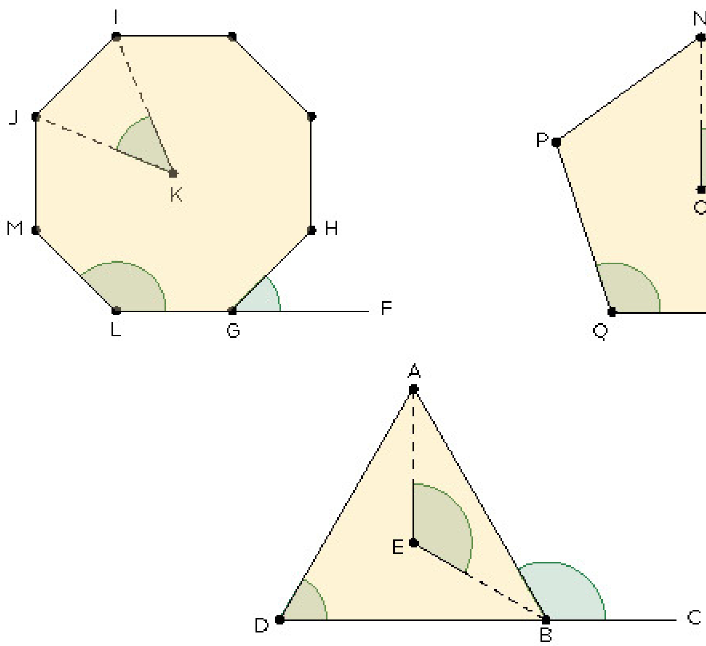


- ¿Cuánto miden el ángulo central ADB y el exterior CBE? ____________
- ¿Cuánto miden el ángulo central FJG y el exterior JGH? ____________
- ¿Cuánto miden el ángulo central SOR y el exterior NRP? ____________

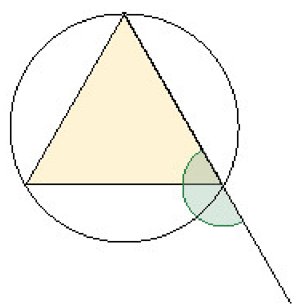
> Compartan con otros equipos sus resultados.

4. En equipos, analicen los ángulos central, interno y externo de cada polígono y sin medirlos indiquen la medida de cada uno.

Usen su transportador para corroborar sus respuestas.



- ¿Cuánto miden los ángulos NOS y SRT en el pentágono? ¿Y cuánto el ángulo interno? ____________
- ¿Cuánto miden los ángulos IKJ y HGF en el octágono? ¿Y cuánto el ángulo interno? ____________
- ¿Cuánto miden los ángulos AEB y CBA en el triángulo equilátero? ¿Y cuánto el ángulo interno? ____________
- ¿Qué relación encuentran entre los ángulos centrales y externos en los polígonos? ____________
- ¿Qué relación encuentran entre los ángulos centrales, externos e internos en los polígonos? ____________
- Observa la figura a la derecha. Si miden juntos un ángulo exterior y el interno adyacente a él, ¿qué tipo de ángulo se forma?, ¿cuánto mide? ____________
- ¿Cómo pueden calcular la medida de un ángulo interno si conocen la medida del ángulo exterior? ____________



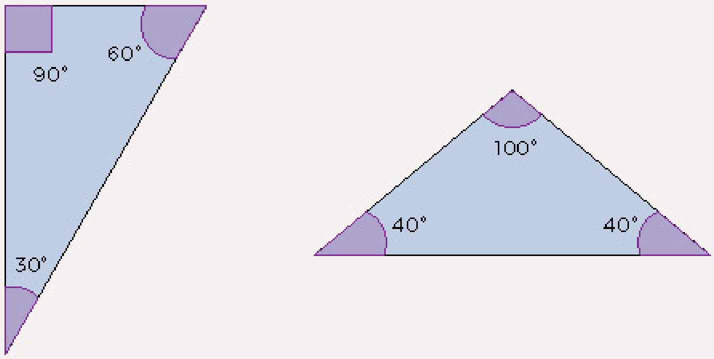
- Escriban brevemente las relaciones que encuentren entre los ángulos central, interno y externo en los polígonos regulares. ______________________________

Expongan su trabajo grupalmente. Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, compartan los resultados de su investigación para que todos comprendan las relaciones que existen entre los ángulos centrales, internos y externos en los polígonos convexos.

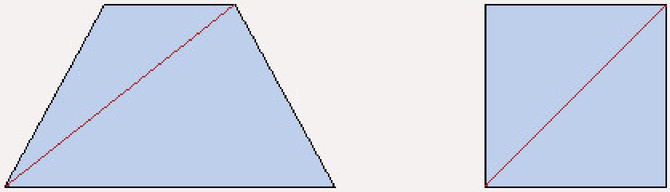
Hagamos una reflexión

En un polígono, los ángulos interiores están formados por la abertura de dos lados consecutivos.

Es importante recordar que la suma de la medida de los ángulos interiores de cualquier triángulo es de 180°.

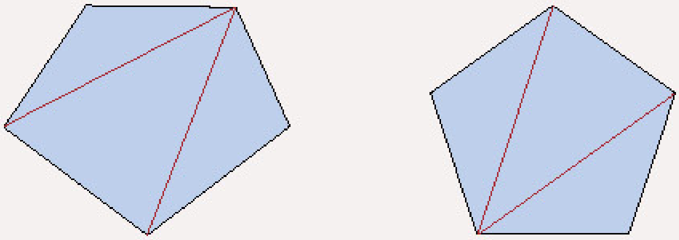


Los cuadriláteros pueden dividirse en dos triángulos, trazando una de sus diagonales.



Si cada triángulo suma 180°, ¿cuánto sumará la medida de los ángulos interiores de un cuadrilátero?:

Si a partir de un vértice, se trazan diagonales, en los pentágonos resultan tres triángulos.



Si la suma de los ángulos interiores de cada triángulo es 180°:

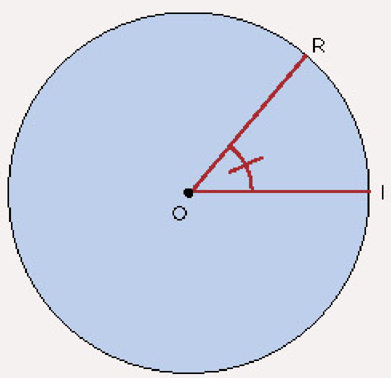
- en el pentágono se forman (5–2) 3 triángulos;
- en el hexágono se forman (6–2) 4 triángulos;
- en un polígono de *n* lados se forman (*n*–2) triángulos.

La forma de calcular la suma de los ángulos interiores será:

- Suma de ángulos interiores = 180(*n*–2)

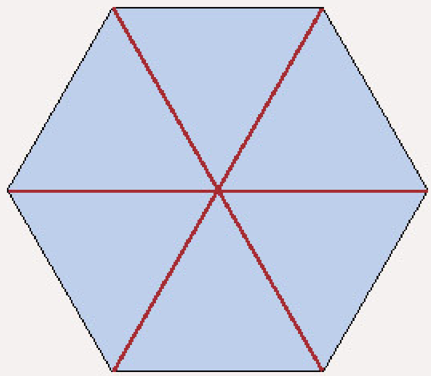
En un **ángulo central** de un polígono regular se calcula con la fórmula:

$$Ac = \frac{360}{n}$$



Para trazar un polígono regular, hay que dividir sus 360° entre el número de lados que se desean.

Por ejemplo, para un hexágono, ¿cuánto mide cada uno de sus ángulos centrales?



Los ángulos exteriores están formados por un lado del polígono y la prolongación de su lado adyacente.

Si se conoce la medida de su ángulo central, se conoce la medida de su ángulo exterior.

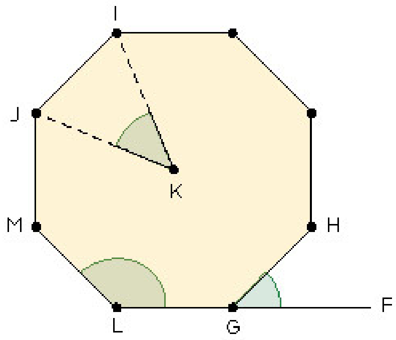
En los polígonos, los ángulos interiores son adyacentes a sus ángulos externos formando ángulos colineales o llanos que miden 180°.

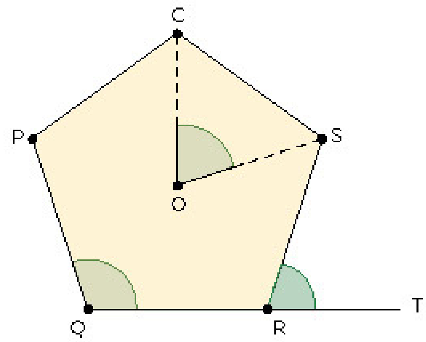
Para conocer la medida de un ángulo interno en un polígono regular, hay que calcular cuánto le falta al ángulo exterior para sumar lo de un ángulo llano o dividir la suma de los ángulos internos 180(*n*–2) entre el número de lados del polígono (*n*).

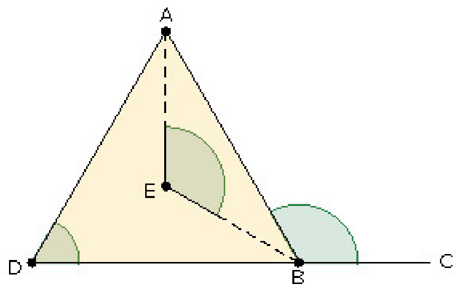
Recursos de interés

Si quieren leer y resolver algunos ejercicios sobre los ángulos en los polígonos regulares, entren a la siguiente página: https://bit.ly/2OzPP3m

5. **Usen los conocimientos adquiridos en la lección y escriban la medida de los ángulos central, interno y externo de los polígonos.**







- Triángulo

  ∢central __________ ∢interno __________ ∢externo __________
- Octágono

  ∢central __________ ∢interno __________ ∢externo __________
- Pentágono

  ∢central __________ ∢interno __________ ∢externo __________

Para finalizar

1. **En parejas, retomen el problema que involucra a Belén y su rapidez con la suma de ángulos en polígonos y verifiquen sus respuestas.**

2. **En equipos contesten lo siguiente.**

- ¿Cómo definen un ángulo central? ____________________
- ¿Cómo definen un ángulo interno? ____________________
- ¿Cómo definen un ángulo externo? ____________________
- ¿Cuánto suman los ángulos centrales en cualquier polígono? __________

3. Subraya la opción correcta.

De qué polígono se trata, si al dividirlo en triángulos con diagonales desde un vértice resultaron:

- 2 triángulos
- 4 triángulos
- 6 triángulos

4. En parejas, escriban la medida de los ángulos o de los polígonos regulares o de la suma pedida.

Polígono regular	Ángulo central	Ángulo interior	Ángulo externo	Suma de ángulos internos
Triángulo equilátero				
		120°		
			72°	
			90°	

Trabaja con...

En una hoja electrónica de cálculo que calcule la medida de ángulos centrales, internos y externos y su suma en polígonos regulares.

En la celda azul introduzcan el número de lados del polígono.

No olviden escribir las fórmulas iniciando con = para que la hoja calcule automáticamente.

¿Cuál es el menor número de lados que se debe introducir en la celda azul? ¿Por qué?

Si quieren saber los datos de más de un polígono a la vez, copien las celdas del renglón 4 hacia abajo.

Analicen las fórmulas usadas y comenten en el grupo sus observaciones.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Polígonos regulares convexos						
2	Número de lados	Ángulo central	Ángulo interno	Ángulo externo	Suma de ángulos		
3					Centrales	Internos	Externos
4		=360/A4	=180-B4	=B4	=A4*B4	=A4*C4	=A4*D4

> En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.

> Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

Secuencia

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos geométricos

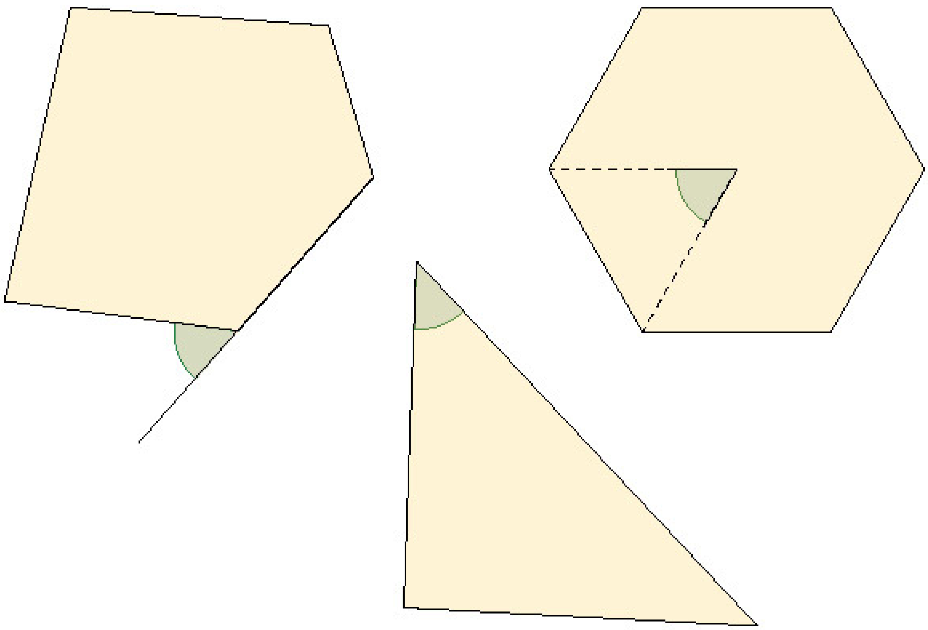
17 Los polígonos y su construcción

Siguiendo con el estudio de los polígonos, en esta secuencia aprenderás a resolver problemas de construcción de polígonos regulares con instrumentos geométricos a partir de diferentes datos.

Recuperamos lo aprendido

1. **En parejas, observen las siguientes figuras geométricas y el ángulo marcado en cada una.**

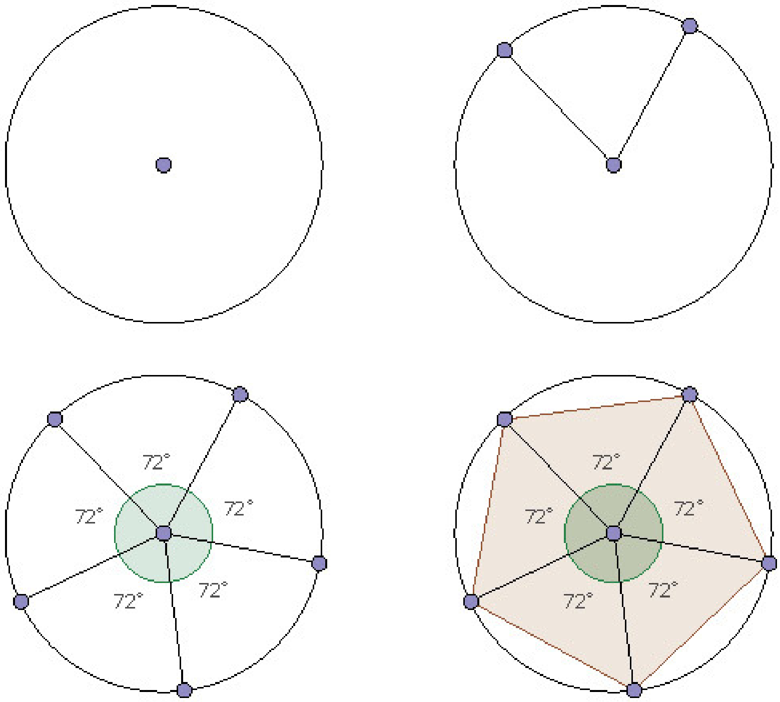
   Escriban la letra C dentro del polígono que tiene marcado un ángulo central, la letra I para el que tiene marcado un ángulo interior y la letra E para el que tiene marcado un ángulo exterior. Escriban también la forma de calcular cada uno.



Construyo algo nuevo

1. **En equipos de tres resuelvan el siguiente problema.**

   - Observen cómo se traza un pentágono regular y trácenlo.
   - En una hoja redacten el procedimiento que se muestra.
   - Decidan las medidas que tendrá el polígono.
   - Intercambien su hoja con la redacción con la de otro equipo.
   - Al recibir la descripción, sigan las instrucciones que les entreguen y tracen en su cuaderno el pentágono.



- Al terminar, muestren su trazo al equipo emisor y comparen los polígonos, en caso de discrepancias, analicen en dónde estuvo el error y corrijan.
- Comenten con otros equipos en qué se basó el trazo del pentágono.

2. **En equipos, lean y llenen la tabla. Supongan que todos los polígonos son regulares.**

Polígono	Medida de cada ángulo central	Suma de sus ángulos centrales
Triángulo		
Cuadrado		
Pentágono		
Hexágono		
Heptágono		

Respondan:

- ¿En que se parecen y en qué son diferentes los polígonos de la tabla? ______
- ¿Qué polígono regular tiene ángulos centrales de 30°? ¿Por qué? ______
- ¿Cómo trazarían un polígono regular de *n* lados usando la medida del ángulo central? ______

- Si sólo conocieran la medida del ángulo interior, ¿cómo trazarían el polígono? ______________________

- Y si sólo conocieran la medida del ángulo exterior, ¿cómo trazarían el polígono? ______________________

- Comenten en el equipo cómo se puede trazar un polígono regular si se conoce solamente la medida de su ángulo central, interior o exterior. ______________________

Compartan con otros equipos sus conclusiones.

3. **Trazo de polígonos.**

- En su cuaderno, tracen un polígono regular de tal manera que utilicen cada vez la medida del ángulo central, la del ángulo interno o la del ángulo externo.
- Digan a otro equipo solamente la medida de uno de sus ángulos, el tipo de ángulo que es (central, interno o externo) y la longitud de un lado para que lo tracen.
- Al terminar, comparen los polígonos y en el caso de que no sean congruentes analicen en dónde estuvo el error y corrijan.

Expongan su trabajo grupalmente.

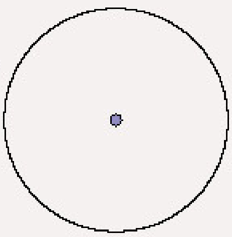
Hagamos una reflexión

En un círculo, al dividir 360° entre *n* el número de cortes en la circunferencia serán *n*.

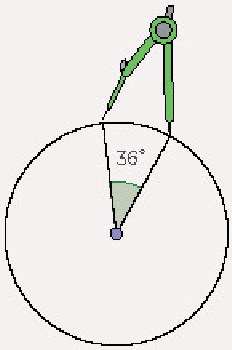
Por ejemplo, observa el trazo de un decágono regular, es decir, un polígono con 10 lados congruentes.

Se divide __________ ÷ 10 = 36°, es decir, los ángulos centrales serán de 36°. Observa a continuación cómo se traza el decágono.

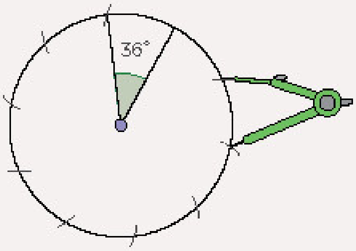
1. Traza una circunferencia y ubica su centro.



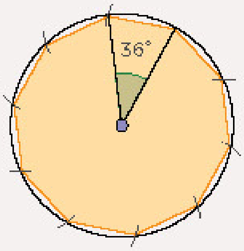
2. Traza un ángulo de 36° y con un compás toma la medida.



3. Traza los demás arcos con el compás.

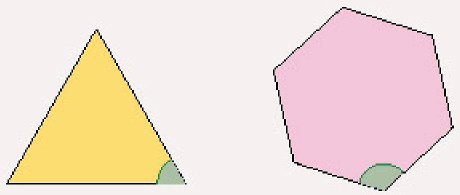


4. Une las marcas para formar el decágono regular.



Cuando la medida de cada ángulo central crece, el número de lados disminuye; cuando la medida decrece, el número de lados aumenta.

Los ángulos interiores están formados por la abertura de dos lados consecutivos del polígono.

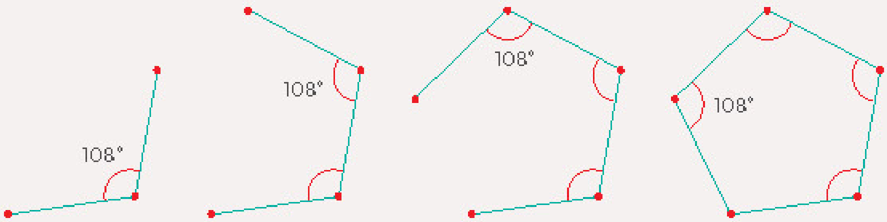


Ángulo interior 60° Ángulo interior 120° Ángulo interior 132°

Si se quiere trazar un pentágono usando la medida de los ángulos interiores, un procedimiento es el siguiente:

1. Calcular la medida del ángulo interior.
2. Decidir la medida de los lados y trazar un ángulo de ____________ con la medida seleccionada.

Seguir trazando ángulos de 108°, uno a continuación del otro, con la medida decidida para los lados.



Si se sabe la medida del ángulo exterior para el trazo de un polígono, se puede deducir la medida del ángulo interior o del **ángulo** central y usar para el trazo, los métodos estudiados.

> De manera grupal hagan comentarios y expongan sus dudas para recibir ayuda de otros estudiantes.

Para finalizar

1. En tu cuaderno, traza los siguientes polígonos regulares y escribe brevemente tu procedimiento.

- De 4 cm por lado con ángulos centrales de 120°
- De 5 cm por lado con ángulos externos de 90°
- De 4 cm por lado con ángulos internos de 108°.

- Escribe el nombre de cada polígono. ____
____
- ¿Se puede elegir cualquier medida de ángulo central para trazar un polígono regular? ¿Por qué? ____

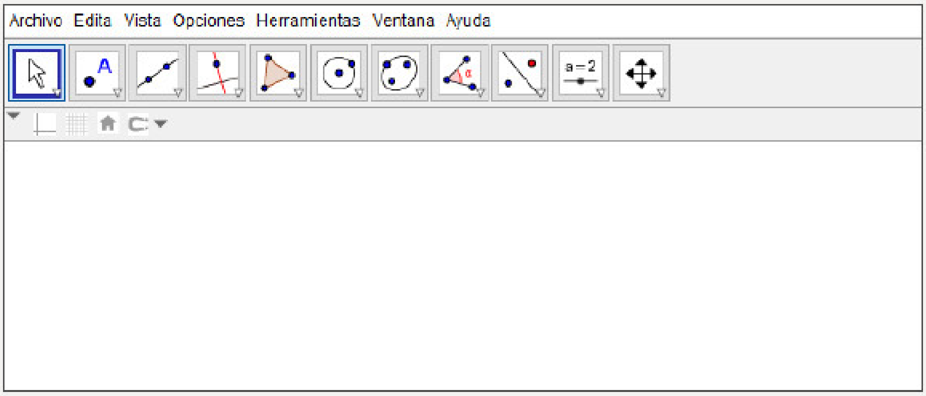
- ¿En los polígonos regulares la suma de sus ángulos centrales es la misma? ¿Por qué? ______
- ¿En los polígonos regulares la suma de sus ángulos internos es la misma? ¿Por qué? ______
- ¿En los polígonos regulares la suma de sus ángulos externos es la misma? ¿Por qué? ______
- ¿Cuánto suman las medidas de un ángulo externo y del ángulo interno adyacente? ¿Por qué? ______

Trabaja con...

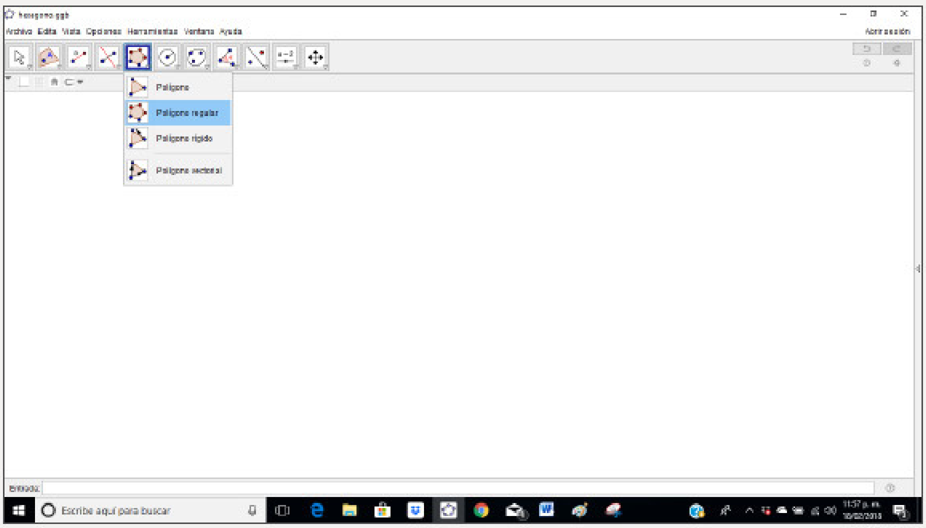
Realicen en equipo la siguiente actividad.

Sigan las instrucciones:

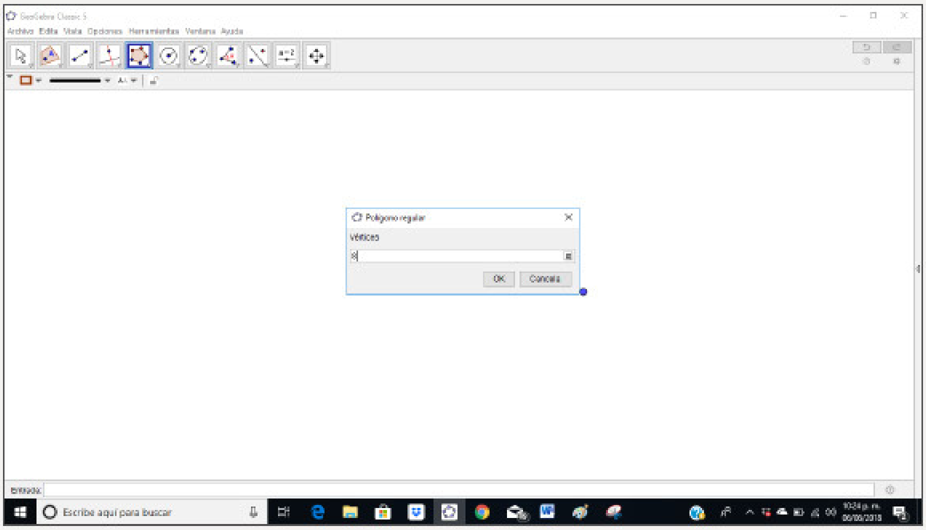
- Abran una hoja de trabajo en GeoGebra. Con un clic derecho en el ratón eliminen la cuadrícula y los ejes de coordenadas. Cierren también la vista algebraica dando un clic en la X.



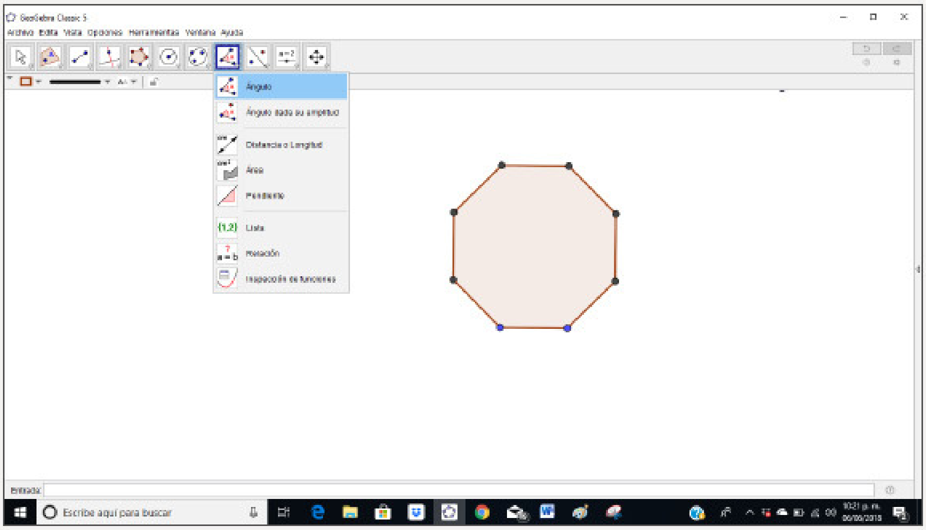
- Activen el comando de polígonos regulares.



- Tracen polígonos regulares de diferentes número de lados por ejemplo de 8 lados, marcando en la pantalla dos puntos que corresponden a la medida de un lado e introduciendo el número de lados.



- Escriban en su cuaderno la medida de los ángulos centrales, interiores y exteriores, corroboren sus respuestas con el comando ángulo, marcando los tres puntos que limitan el ángulo, cuidando que el segundo punto corresponda al vértice.



- Prolonguen algunos lados con el comando línea y midan los ángulos exteriores.
- Planeen una estrategia para encontrar el centro del polígono, tracen sus ángulos centrales y mídanlos.

> En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.

> Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

Secuencia

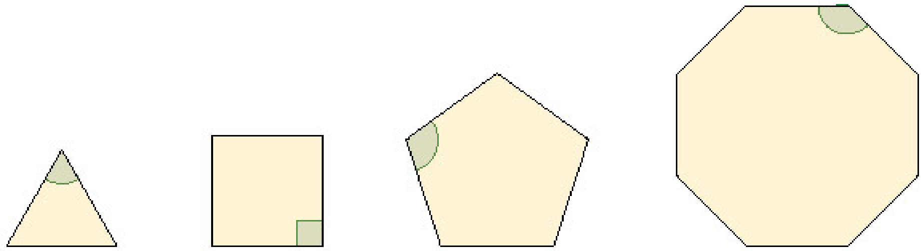
Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos geométricos

18 No cualquiera tesela un plano

Después de haber aprendido algo sobre el trazo de polígonos, ahora aprenderás algo sobre polígonos que cubren el plano, analizando la construcción de mosaicos (teselados) usando polígonos regulares e irregulares.

Recuperamos lo aprendido

1. **En parejas, observen las siguientes figuras geométricas y deduzcan la medida de uno de sus ángulos interiores y anótenlo. Escriban también la forma de calcularlos.**



_______________ _______________ _______________ _______________

- ¿En qué casos la medida del ángulo interior es submúltiplo de 360° (que al dividir 360 entre la medida del ángulo, el residuo es cero)? ______________________________

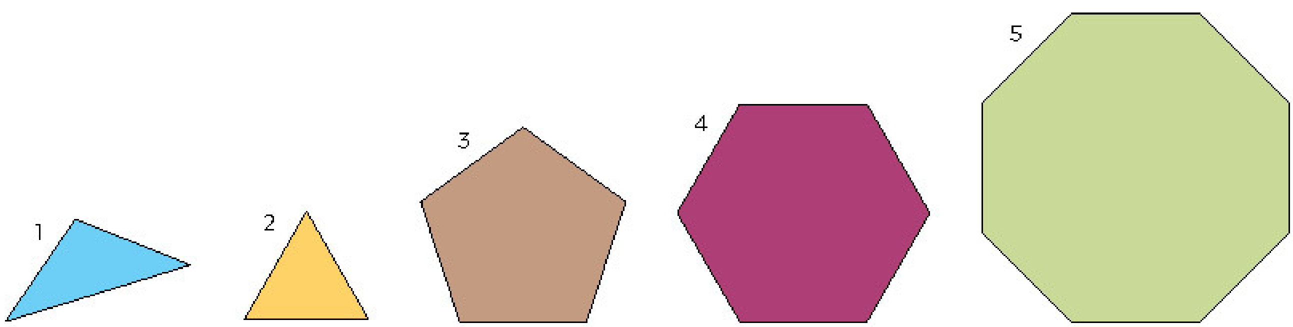
____

> Comparen sus respuestas y estrategias con las de otras parejas.

Construyo algo nuevo

1. **En equipos de tres resuelvan el siguiente problema.**

Diana quiere colocar el piso del comedor, pero no quiere losetas tradicionales, por lo que al ir a la tienda, busca losetas que no sean cuadradas. El vendedor le indica que no todas cubren totalmente el piso y que en algunos casos hay que combinarlas para cubrirlo. Estas son las losetas que encontró:



Al interior del equipo discutan y respondan las preguntas:

- ¿Cómo pueden saber cuáles losetas pueden cubrir totalmente el piso y cuáles no? ______________________
- ¿Con cuáles losetas podrá cubrir un piso sin necesidad de combinarlas? ______________________
- ¿Por qué? ______________________
- ¿Cuáles losetas tendrá que combinar para poder cubrir el piso? ______________________
- ¿Por qué? ______________________

> **Comenten sus estrategias y resultados con las de otros equipos.**

2. **En equipos, hagan lo siguiente.**

Cada uno de los integrantes, trace y recorte tres polígonos de los mostrados anteriormente, cuiden que los polígonos regulares tengan los lados del mismo tamaño y el triángulo isósceles tenga la longitud de sus lados iguales, del mismo tamaño que los polígonos regulares.

Primero, estimen con cuáles polígonos del mismo tipo podrán cubrir un plano, sin que queden huecos, y en qué casos tendrán que combinarlos.

Posteriormente, intenten cubrir un plano sin que queden huecos con los polígonos que estimaron, y registren en la tabla sus conclusiones.

Polígono	Estimación sobre cubrir o no el plano	¿Cubre el plano sin dejar huecos o encimarse?	¿Necesita otro polígono para cubrir el plano?	Medida de sus ángulos internos
Pentágono				
Hexágono				
Octágono				
Triángulo isósceles rectángulo				

- ¿En cuántos casos sus estimaciones fueron correctas? ______________________
- ¿Por qué algunos polígonos del mismo tipo pueden cubrir un plano? ______________________
- ¿Cuáles son los polígonos que deben combinarse para poder cubrir el plano? ______________________
- Escriban en su cuaderno qué relación hay con la medida de los ángulos internos en los polígonos, para poder o no cubrir un plano.

> **Escuchen las opiniones de otros equipos y compartan las propias.**

Diccionario

Teselar
Anexarle alguna ilustración de un piso adoquinado u otra foto en la que se vea cubierto por loseta.

3. **En equipos, dibujen en su cuaderno una teselación, usando polígonos, ya sean regulares o irregulares. Si es necesario los pueden combinar.**

- Expliquen brevemente en su cuaderno cuáles polígonos usaron y cuál fue su estrategia para lograrlo.
- Expongan sus teselaciones en el grupo y cuenten cuántos polígonos diferentes uso cada equipo.
- ¿Cuántos polígonos diferentes tiene el equipo que usó menos y cuántos el que usó más?

> Comenten y escuchen las opiniones de los demás.

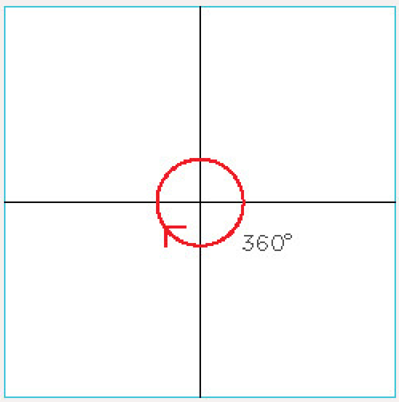
Hagamos una reflexión

En parejas lean y comenten.

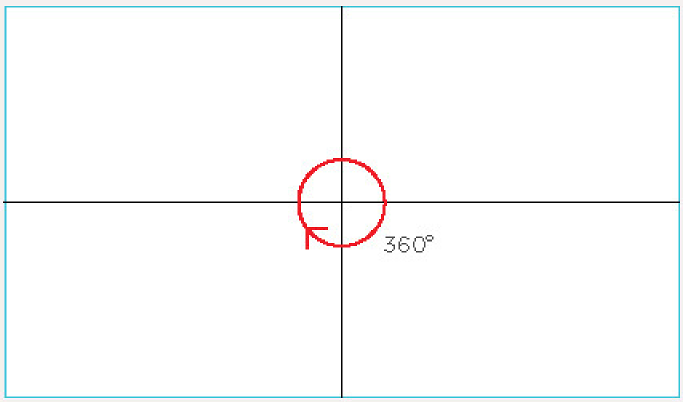
Se tesela un plano cuando es posible cubrirlo con polígonos regulares o irregulares, sin dejar huecos y sin superponerlos.

No siempre es posible cubrir el plano con un solo tipo de polígono.

Con los cuadrados y los rectángulos siempre es posible cubrirlo sin dejar huecos y sin superponerlos, esto sucede porque al colocar varios juntos en la unión de sus vértices, sus ángulos interiores suman 360°. Observen la figura.



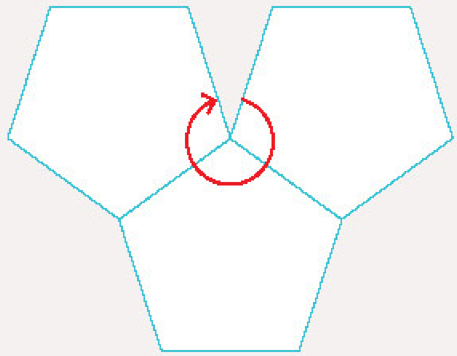
90° × 4 = 360°



90° × 4 = 360°

En el caso del pentágono regular, no es posible cubrir el plano.

Observen la imagen y escriban en su cuaderno, ¿por qué no es posible cubrir un plano usando solamente pentágonos regulares?



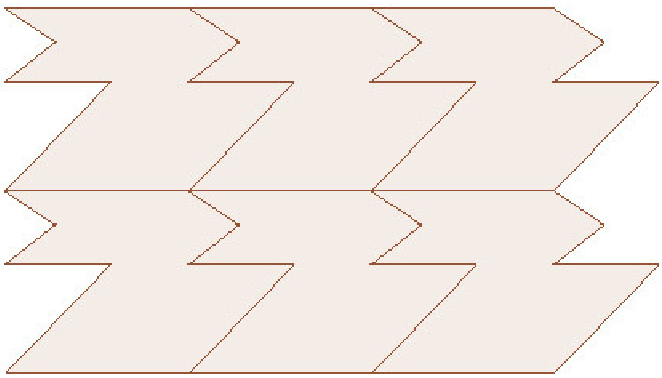
108° × 3 = 324°

4. Completen los enunciados.

- Un plano podrá cubrirse con uno o diferentes tipos de polígonos, siempre y cuando en la unión de sus vértices la suma de sus ángulos interiores sea de ______________
- Investiguen cuáles son los polígonos regulares con los que se puede teselar un plano y anoten sus nombres. ______________________________

____

____
- En su cuaderno, hagan una teselación con los polígonos anteriores y verifiquen que la unión de los vértices sume 360°.
- Observen la figura. Para cubrir un plano combinando polígonos regulares o irregulares es posible siempre y cuando la suma de sus ángulos interiores en la unión de sus vértices sea de ______________.

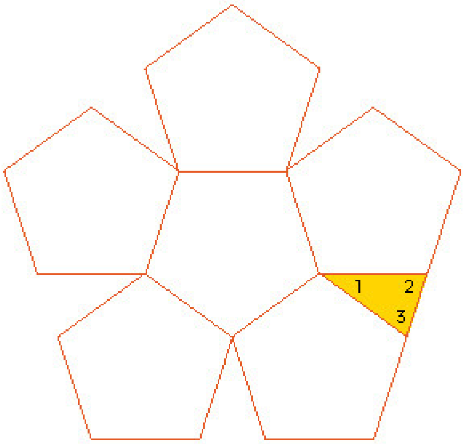


> Comenten grupalmente si alguien conoce algún plano cubierto por polígonos que no sean cuadriláteros.

Para finalizar

1. **En parejas contesten lo siguiente.**

   a. ¿Cuánto deben medir los ángulos del triángulo para cubrir el espacio entre los pentágonos regulares? ____________________



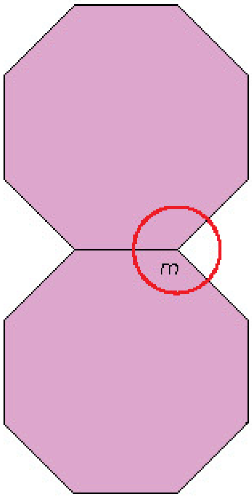
∢1 = ____________

∢2 = ____________

∢3 = ____________

   b. El triángulo que llena los espacios, ¿es equilátero, isósceles o escaleno? ________
   ¿Por qué? ____________________
   ____

   c. Si se unen dos octágonos por sus aristas, ¿cuánto suman los ángulos interiores que se juntan? ____________________
   - ¿Cuánto mide el ángulo *m*? ____________________
   - ¿Qué otro polígono pueden usar para ayudar a cubrir el plano? ____________
   ¿Por qué? ____________________
   ____



d. ¿Cualquier polígono puede teselar el plano?

- ¿Por qué?

e. ¿Se podrá teselar un plano con cualquier tipo de triángulos?

- ¿Por qué?

f. ¿Qué condición deben cumplir los polígonos para poder teselar un plano?

> **Busquen en internet "Teselaciones de Escher" y observen las teselaciones de este artista holandés.**

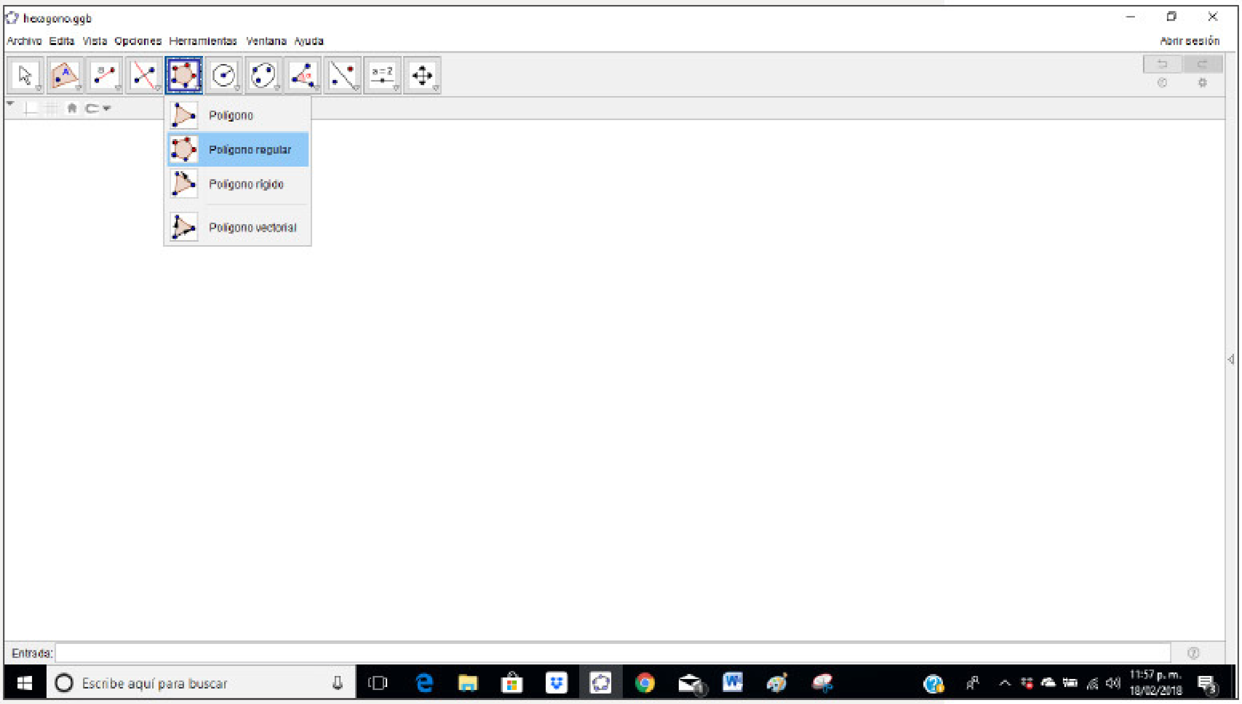
> **Comparen sus respuestas y estrategias con las de otras parejas.**

Trabaja con...

Realicen en equipo las siguientes investigaciones.

Si aún no lo tienen, descarguen gratis GeoGebra en la siguiente liga: https://bit.ly/1bxFws3.

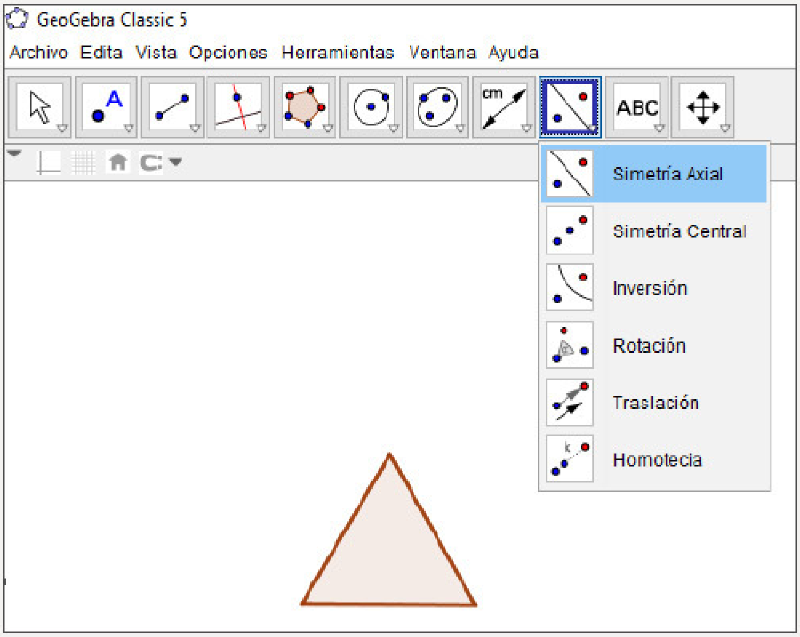
- Usen el comando de polígono regular y tracen algún polígono. Por ejemplo, un triángulo equilátero.

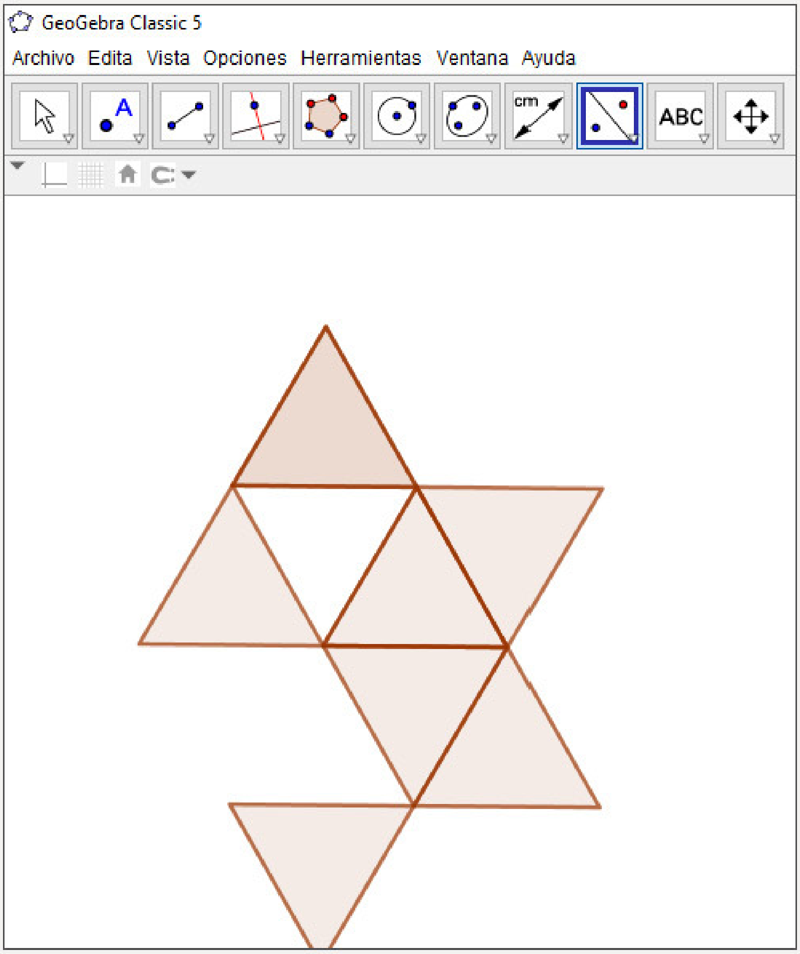


Diccionario

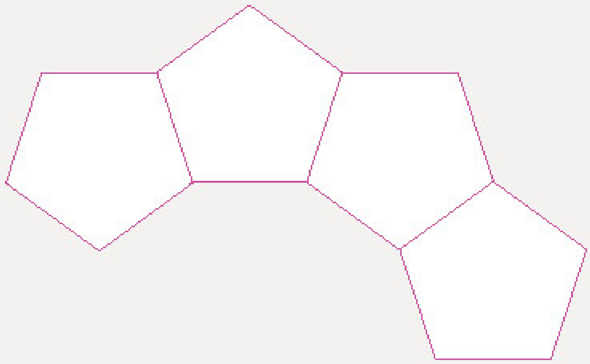
Simetría axial
Cuando respecto a una recta una figura es el reflejo de otra, de tal forma que para cada punto de la figura original, existe otro reflejado de manera perpendicular a la misma distancia de la recta de referencia.

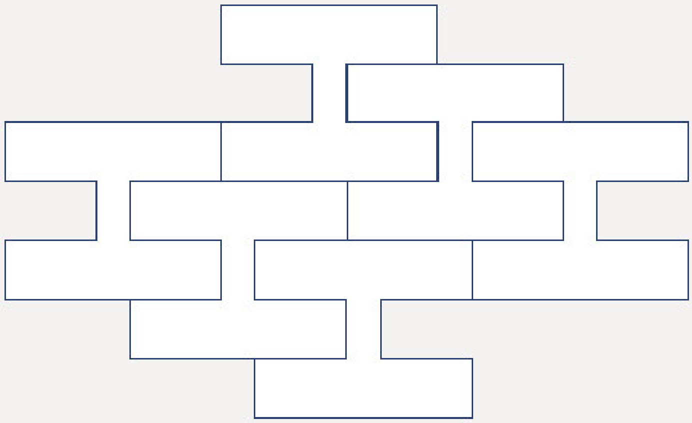
- Usen el comando de **simetría axial** para reproducir el triángulo, hasta teselar el plano.

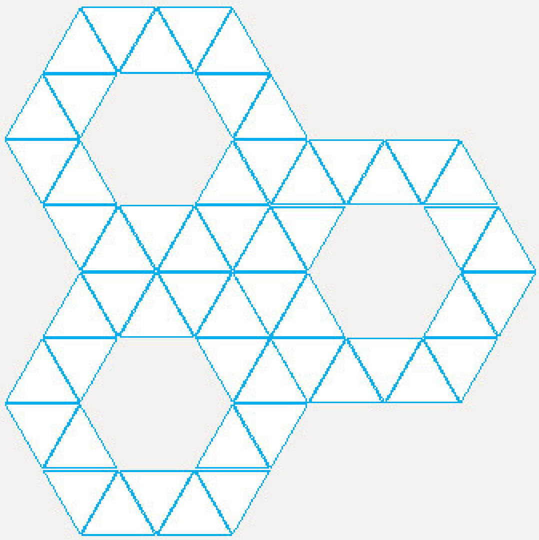




- Prueben con otros polígonos regulares o irregulares.







- En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.
- Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

19 El Sistema Internacional de Unidades (SI)

Todos tenemos necesidad de medir algo, así que, es importante que conozcas el Sistema Internacional de Unidades y su conversión de una unidad de medida a otra.

Recuperamos lo aprendido

1. **En parejas resuelvan la actividad.**

Observen y escriban el número 1 a la moto más veloz, el 2 a la que le sigue y el 3 a la menos veloz.

☐ 

$63.4\ \frac{m}{s}$

☐ 

$3.78\ \frac{km}{min}$

☐ 

$223\ \frac{km}{h}$

- ¿Hay alguna manera de saber cuál de las tres motos es la más veloz? ____________________

____

- ¿Cómo se podrían comparar las velocidades de cada una? ____________________

____

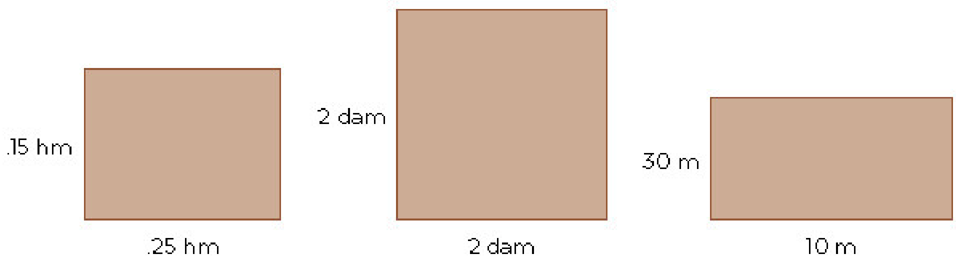
- ¿Qué unidad de medida se podría utilizar? ____________________

> Comparen sus respuestas y estrategias con las de otras parejas.

Construyo algo nuevo

1. **En equipos resuelvan el siguiente problema.**

a. El papá de Víctor quiere comprar un terreno. Ha visto tres que le interesan, pero en cada ocasión le dieron las medidas del terreno en una unidad distinta de medida; a él le interesa el que tenga mayor superficie.

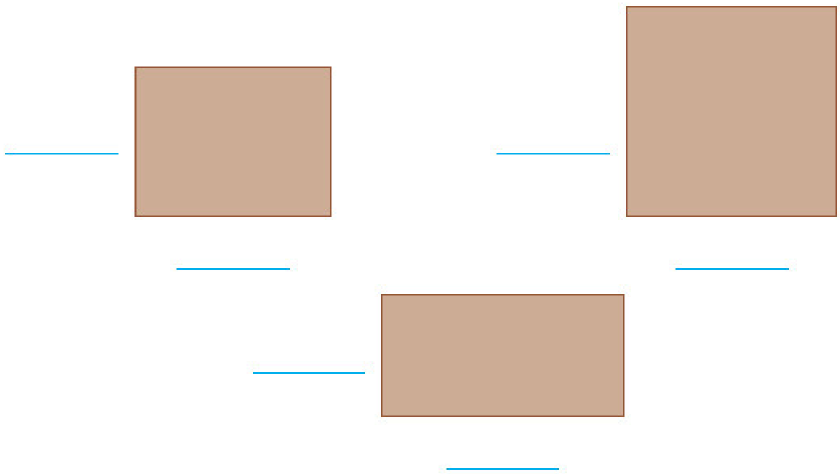


- ¿Cómo se puede calcular el perímetro de cada terreno? ______________________
- ¿Cómo se puede calcular el área de cada terreno? ______________________

> **Comparen con las de otros equipos sus respuestas y estrategias.**

b. Las medidas de los terrenos están expresados en hectómetros, decámetros y en metros. Investiguen:

- ¿Cuántos metros tiene un hectómetro? ______________________
- ¿Cuántos metros tiene un decámetro? ______________________
- ¿Un metro a cuántos decámetros y a cuántos hectómetros equivale? ______________________
- Con esa información ya pueden expresar todos los terrenos en la misma unidad de medida. Anoten las medidas de los terrenos en metros:



c. ¿Cuántos m^2 tiene el terreno que le puede interesar al papá de Víctor? ____________

> **En caso necesario, ayuden a sus compañeros para que todos comprendan por qué es necesario expresar los datos en una sola unidad de medida para una mejor comparación.**

2. **En equipos, lean la siguiente situación y resuelvan.**

a. Mary quiere mandar a construir una **cisterna** con capacidad para 10 000 litros de agua y así recolectar agua de lluvia, pero necesita determinar sus dimensiones para planear dónde construirla.

Mary tiene dos lugares rectangulares disponibles para la construcción de la cisterna con las siguientes dimensiones, respectivamente:

- 2 metros por 2.5 metros
- 3 metros por 1.5 metros

Diccionario

Cisterna
Depósito donde se recoge el agua de lluvia o la que llega por tubería.

- ¿Cuáles pueden ser las dimensiones de la cisterna en cada espacio disponible?

- ¿Cómo se pueden decidir las dimensiones de la cisterna en metros, si Mary la quiere de 10 000 litros de capacidad?

> Comenten con otros equipos sus estrategias y resultados.

b. Llenen la tabla y después respondan.

Consigan algunos envases en forma de prisma rectangular que contengan $\frac{1}{4}$ de litro, $\frac{1}{2}$ litro, 1 litro y 2 litros o más, y mídanlos en cm y en dm, calculen su volumen y registren las medidas en la tabla.

Recipiente	Capacidad en litros	Dimensiones			Medida en cm^3	Medida en dm^3
		largo	ancho	alto		
1						
2						
3						
4						
5						

Según los datos de la tabla:

- ¿1 litro cuántos cm^3 son?
- ¿1 litro cuántos dm^3 son?
- ¿Cuántos dm^3 caben en 1 m^3?
- ¿Cuántos litros caben en 1 m^3?

c. Regresen a la situación del inciso *a*.

- ¿Cuántos m^3 deberá tener la cisterna de Mary de capacidad para que le quepan 10 000 litros?
- ¿Cuál de los dos lugares ocupará para construir la cisterna?

> Compartan con otros equipos sus resultados y estrategias.

Hagamos una reflexión

En el Sistema Internacional de Medidas (SI) se usan diferentes unidades básicas:

El **metro** para **medidas de longitud**, incluidos como medidas derivadas el m^2 y el m^3, respectivamente, con sus múltiplos y submúltiplos.

Múltiplos			m	Submúltiplos		
km	hm	dam		dm	cm	mm
10 000 m	100 m	10 m	1 m	0.1 m	0.01 m	0.001 m
Múltiplos				Submúltiplos		
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1 000 000 m^2	10 000 m^2	100 m^2	1 m^2	0.01 m^2	0.0001 m^2	0.000001 m^2
Múltiplos				Submúltiplos		
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1 000 000 000 m^3	1 000 000 m^3	1 000 m^3	1 m^3	0.001 m^3	0.000001 m^3	0.000000001 m^3

El prefijo **mega** (M) significa 1×10^6, por lo cual un mega metro (Mm) tendrá 1 000 000 m.

El **kilogramo** para las unidades de masa, y del cual se derivan su múltiplo y sus submúltiplos.

Múltiplos	kg	Submúltiplos					
Tonelada métrica (Tm)		hg	dag	g	dg	cg	mg
1000 kg	1000 g	100 g	10 g	1 g	0.1 g	0.01 g	0.001 g

El **segundo**, usado para **unidades de tiempo**.

Se utilizan también el **minuto**, la **hora** y el **día**, los cuales se pueden representar con segundos, aunque estas medidas no pertenecen al Sistema Internacional.

- 1 minuto equivale a 60 segundos
- 1 hora equivale a 3 600 segundos
- 1 día equivale a 86 400 segundos

3. **Revisa la información anterior y responde de manera individual.**

a. En las unidades de medida de longitud:

- ¿Cómo varían los múltiplos y cómo los submúltiplos de las unidades lineales? ______
- ¿Cómo los de las unidades cuadradas? ______
- ¿Cómo los de las unidades cúbicas? ______

b. En las unidades de medida de masa:

- ¿Cómo varían los múltiplos? ______
- ¿Cómo los submúltiplos? ______

c. El sistema de medición que utilizamos en México es un sistema métrico decimal. ¿Por qué se le llama así? ______

> Compartan con otros equipos sus respuestas, comentarios y estrategias .

Para finalizar

1. **Resuelvan en parejas.**

a. Pamela quiere elaborar marcos de madera de cuando menos 50 cm por lado.

- Si tiene tiras de madera de 2.50 m, ¿cuántos marcos diferentes podría elaborar Pamela con cada tira? ______________________
- Si tarda en hacer cada marco 45 min, ¿cuántos hará en una jornada de 7 horas? ______________________ ¿Y cuántos en 15 días de trabajo? ______________________

b. Representen con tres cuadriláteros distintos un terreno, de tal forma que tengan el mismo perímetro.

- ¿Tienen la misma área? ______________________

c. Investiguen qué otras unidades de medida están en el SI y lo que miden.

____

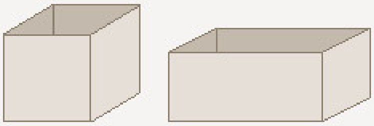
____

d. Un contenedor con 2 hl de líquido, debe ser vaciado en botellas de 500 ml. ¿Cuántas botellas se podrán llenar? ______________________

e. Inventen un problema en el que intervengan los siguientes datos: 75 kg, 800 g, y resuélvanlo.

f. Terminen de plantear el problema y resuélvanlo.

En una tienda usan las siguientes cajas para empacar:



g. ¿Qué unidad de medida usarían para…

- medir la distancia entre México y Japón? ______________________
- medir la superficie de un bosque? ______________________
- medir el tiempo que tarda en llenarse un tinaco? ______________________
- comparar dos elefantes?, ¿qué medirían de ellos? ______________________

> **Comparen sus respuestas y estrategias con las de otras parejas y en forma grupal. En caso necesario, expliquen el porqué de sus respuestas.**

Trabaja con…

Realicen en equipo las siguientes tablas.

Usen una hoja electrónica de cálculo para hacer una tabla de equivalencias de medidas de longitud. Observen bien las fórmulas que se usarán:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	**Equivalencias en medidas de longitud**							
3		km	=A3*10	=C3*10	=D3*10	=E3*10	=F3*10	=G3*10
4	=B4/10		hm	=B4*10	=D4*10	=E4*10	=F4*10	=G4*10
5	=B5/10	=C5/10		dam	=C5*10	=E5*10	=F5*10	=G5*10
6	=B6/10	=C6/10	=D6/10		m	=D6*10	=F6*10	=G6*10
7	=B7/10	=C7/10	=D7/10	=E7/10		dm	=E7*10	=G7*10
8	=B8/10	=C8/10	=D8/10	=E8/10	=F8/10		cm	=F8*10
9	=B9/10	=C9/10	=D9/10	=E9/10	=F9/10	=G9/10		mm

Al escribir en las celdas verdes una cantidad, automáticamente mostrará las equivalencias en otras unidades de medida. Respondan en su cuaderno:

- ¿Por qué en las celdas azules de la parte superior se multiplica cada vez por 10?
- ¿Por qué en las celdas azules de la parte inferior se divide cada vez entre 10?

Elaboren otras dos tablas, una para encontrar equivalencias en medidas de masa y otra para encontrar equivalencias en unidades de tiempo.

Usen las tablas para resolver problemas.

> En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.

> Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

20 El sistema inglés

Una vez que conociste el Sistema Internacional de Medidas, es tiempo de que conozcas también el Sistema Inglés y conversión de unidades.

Recuperamos lo aprendido

1. **En parejas, resuelvan el siguiente problema.**

Eduardo va a una conferencia, que inicia a las 11 a.m., y le faltan 322.5 km para llegar a su destino. Él maneja a una velocidad promedio de 95 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y son las 6:55 a.m.

- Estimen si llegará a tiempo a la conferencia. ______
- ¿A qué hora llegará? ______

> Comenten con otras parejas su respuesta y estrategia.

Construyo algo nuevo

1. **En equipos de tres resuelvan lo siguiente.**

Cata y Yólotl viajaron a Estados Unidos. A su llegada encontraron que la gasolina, en lugar de litros, se despacha en **galones**.

- Si al tanque de su auto le caben 55 litros y llevan $\frac{1}{4}$ de tanque, ¿cuántos galones tendrán que ponerle para que llegue a $\frac{3}{4}$? ______
- Investiguen a cuántos litros equivale un galón:

  1 galón = ______ litros

> Comparen con las de otros equipos su respuesta y comenten otras posibilidades.

2. **En parejas contesten las preguntas.**

- ¿Cómo calculan la cuarta parte de una cantidad y las tres cuartas partes? ______
- ¿El resultado será el mismo si se resta $\frac{1}{4}$ a una cantidad que si se calcula $\frac{3}{4}$ de esa cantidad? ______
- ¿Cuántos galones de gasolina le caben al auto de Cata y Yólotl? ______
- ¿Cuántos galones de gasolina tiene el auto de Cata y Yólotl? ______
- ¿Cuántos galones de gasolina hay que ponerle al auto de Cata y Yólotl para llenar el tanque? ______

Diccionario

Galón
Unidad de medida inglesa usada para medir líquidos.

Cata y Yólotl han visto una mercancía de la cual le interesa comprar una tonelada, pero que se vende en libras.

- ¿Cómo podrán saber cuántas libras comprar? ______________________
- Investiguen la equivalencia de una libra en kg. ______________________
- ¿A cuántos kg equivale una tonelada? ______________________
- Estimen si una tonelada será equivalente a un número exacto de libras. ________

____

> **Compartan con otras parejas sus resultados y estrategias y, en caso necesario, ayuden a sus compañeros para que todos comprendan como calcular algunas equivalencias entre el SI y el Sistema inglés de medida.**

Hagamos una reflexión

El **sistema inglés de medidas**, igual que el SI, tiene unidades de medida para medir diversos tipos de magnitudes, entre ellas están las:

- **Unidades de longitud**:

1 yarda = 91.44 cm

1 pulgada = 2.54 cm

- **Unidades de capacidad**:

1 galón = 3.785 litros (dm^3) (redondeado a milésimos)

Onza líquida = 29.57 cm^3 (ml) (redondeado a centésimas)

- **Unidad de masa**:

1 libra = 16 onzas

1 libra = 453.592 g (redondeado a milésimos)

3. En equipos de tres integrantes realicen lo que se indica.

a. Realicen las siguientes conversiones.

- 7 pulgadas a yardas. ______________________
- 12 onzas a galones. ______________________
- 57 libras a kilogramos. ______________________
- ¿Qué masa tiene una onza en gramos? ______________________

b. Investiguen lo siguiente:

- ¿Cuál es la diferencia entre una onza en medidas de capacidad y una onza en medidas de masa? ______________________

____

- ¿Cuál es la unidad de medida en el Sistema inglés para el tiempo? ______________
- ¿En su comunidad se vende o almacena algo en galones? ______________

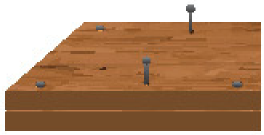
____

> Comenten sus respuestas de manera grupal.

Para finalizar

1. En parejas resuelvan lo siguiente.

3 cm
3 cm



a. Pamela tiene que unir encimadas diferentes tablas y no quiere que los clavos queden con las puntas salidas, ¿de cuántas pulgadas de largo los debe comprar?

- Para unir dos tablas de 3 cm de grosor cada una: ______________
- Para unir una tabla de 4 cm de grosor con una de 3 cm: ______________
- Para unir tres tablas, una de 4 cm de grosor, otra de 5 cm y otra de 2 cm:

____

b. Investiguen cuántas yardas tiene un campo de futbol americano. ______________

c. Si un jugador de futbol americano avanzó 28 yardas, ¿cuántos metros avanzó?

____

d. Una persona usa una báscula que le indica 86 kg. Si usara una báscula calibrada en libras, ¿cuántas marcará? ______________

e. Investiguen el promedio de onzas de leche que toma un bebé por día y calculen cuántos galones de leche tomará en un año. ______________

____

f. Mencionen algunos casos en los que se usen la yarda y la pulgada.

____

____

g. Mencionen algunos casos en los que se usen la onza y galón. ______________

____

____

h. Mencionen algunos casos en los que se use la libra. ______________

____

i. ¿Qué unidad de medida del sistema inglés usarían para medir la cantidad de agua de una alberca? ______________

j. ¿Qué unidad de medida del Sistema inglés usarían para medir el diámetro de un tubo? ______________

> Comparen sus respuestas y estrategias de solución con las de otras parejas.

Trabaja con...

Realicen en equipo las siguientes tablas.

Usen una hoja electrónica de cálculo para hacer una tabla de equivalencias en medidas de longitud.

Observen bien las fórmulas que se usarán.

E12 *fx*

	A	B
1	Equivalencias en unidades de longitud	
2	Pulgadas	Yardas
3		=A3/36
4		
5	Yardas	Pulgadas
6		=A6*36
7		
8		

Al escribir una cantidad en las celdas verdes, se calculará automáticamente su equivalencia en las celdas azules.

Respondan en su cuaderno:

- ¿Por qué para expresar las pulgadas en yardas se divide entre 36?
- ¿Por qué para expresar las yardas en pulgadas se multiplica por 36?

Elaboren otra tabla para calcular equivalencias entre las unidades de capacidad.

Usen sus tablas para resolver problemas.

> En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.

> Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

21 Conversiones entre sistemas

Ahora que conoces el Sistema Internacional de Medidas y el Sistema Inglés, debes aprender cómo realizar conversión de unidades entre sistemas.

Recuperamos lo aprendido

1. **En parejas, observen y analicen la siguiente situación.**

Diana quiere comprar el auto que le dé el mejor rendimiento.

30.6 millas por galón

12.5 kilómetros por litro

- ¿Cuál es la equivalencia de una milla en km? ______________________
- ¿Cuál es la equivalencia de un km en millas? ______________________
- ¿Cómo van a comparar los autos? ______________________
- ¿Cuál de los dos autos le conviene comprar a Diana? ______________________

  ¿Por qué? ______________________

  ____

> **Comenten con otras parejas su respuesta y la estrategia que utilizaron para poder decidir cuál de los autos es el de mayor rendimiento.**

Construyo algo nuevo

1. **En equipos resuelvan el siguiente problema.**

Cata y Yólotl encontraron en los Estados Unidos algunas personas interesadas en comprar algunas mercancías, ahora el problema es que tienen que saber calcular equivalencias dentro del sistema inglés de medidas.

- ¿Cómo expresar las yardas en pulgadas? ______________________
- ¿Cómo expresar las pulgadas en yardas? ______________________
- ¿Cómo expresar los galones en onzas? ______________________
- ¿Cómo expresar las onzas en galones? ______________________

- ¿Cómo expresar las libras en onzas? ____________________
- ¿Cómo expresar las onzas en libras? ____________________

> **Comenten con otros equipos sus estrategias y resultados.**

2. En parejas contesten las preguntas.

- ¿Cuántos centímetros tiene un metro? ____________________
- ¿Cómo calculan cuántos centímetros tienen 2, 3, 4, 5, ..., n metros? ____________________
- ¿Cómo calculan las equivalencias de una medida expresada en unidades de medida menor? ____________ ¿Qué operación utilizan? ____________
- ¿Cuántos centímetros necesitan para formar un metro? ____________________
- ¿A cuántos metros equivalen, 120 cm, 160 cm, 200 cm, 560 cm? ____________________
- ¿Cómo calculan las equivalencias de una medida expresada en unidades de medida mayor? ____________ ¿Qué operación utilizan? ____________

> **Compartan con otras parejas sus resultados y estrategias.**

3. En equipos de tres contesten las siguientes preguntas:

Cata y Yólotl tienen que saber también como representar las unidades del sistema inglés en el sistema internacional y viceversa.

- ¿Cómo expresar las pulgadas en centímetros? ____________________
- ¿Cómo expresar los centímetros en pulgadas? ____________________
- ¿Cómo expresar los galones en litros? ____________________
- ¿Cómo expresar los litros en galones? ____________________
- ¿Cómo expresar las onzas en mililitros? ____________________
- ¿Cómo expresar los mililitros en onzas? ____________________
- ¿Cómo expresar las onzas en gramos? ____________________
- ¿Cómo expresar los gramos en onzas? ____________________
- ¿Cómo expresar las libras en kilogramos? ____________________
- ¿Cómo expresar los kilogramos en libras? ____________________
- ¿Cómo expresar los kilómetros en millas? ____________________
- ¿Cómo expresar las millas en kilómetros? ____________________

> **Comparen sus respuestas y estrategias con las de otros equipos y, en caso necesario, ayuden a otros estudiantes para que todos comprendan por qué es necesario que Cata y Yólotl sepan expresar en las unidades de ambos sistemas diferentes magnitudes.**

Hagamos una reflexión

En equipos lean y terminen de escribir las equivalencias.

Tanto el Sistema Internacional de Unidades como el sistema inglés, tienen las unidades necesarias para medir diferentes tipos de magnitudes, es importante para mucha gente que tiene comercio internacional o contacto con ambos sistemas conocer las equivalencias en ambos y generalmente, si se conoce alguna equivalencia en las diferentes unidades de medida, se pueden deducir otras.

- Unidades de longitud:

  1 yarda = 36 pulgadas = ______________ cm

  1 pulgada = 2.54 cm

- Unidades de capacidad:

  1 galón = 3.785 dm^3

  1 onza líquida = 29.57 cm^3 (ml)

  1 galón = ______________ onzas líquidas

- Unidad de masa:

  1 libra = 16 onzas

  1 libra = 453.592 g

  1 onza = ______________ g

> Comenten con otros equipos sus resultados y estrategias.

Para finalizar

1. **En parejas contesten las siguientes preguntas.**
   - ¿Cuáles son las unidades de longitud en el SI? ______________
   - ¿Cuáles son las unidades de longitud en el sistema inglés? ______________
   - ¿Cuáles son las unidades de capacidad en el SI? ______________
   - ¿Cuáles son las unidades de capacidad en el sistema inglés? ______________
   - ¿Cuáles son las unidades de masa en el SI? ______________
   - ¿Cuáles son las unidades de masa el sistema inglés? ______________
   - ¿Cuáles son las unidades de tiempo en el SI? ______________
   - ¿Cuáles son las unidades de tiempo el sistema inglés? ______________

2. **De manera individual, resuelve los problemas. Escribe tus operaciones.**

   a. Israel tiene un carro al que le caben 55 litros de gasolina, y Víctor tiene otro al que le caben 15 galones.
   - ¿A cuál de los dos le cabe más gasolina? Explica tu respuesta. ______________

     ____

b. Pamela tiene que comprar clavos que midan más de 4 cm pero menos de 6 cm. En la ferretería los tienen en pulgadas.

- ¿De cuántas pulgadas los debe pedir? ____________________

c. Isaac exportará 6.5 toneladas de café a Estados Unidos a un precio de $32 por libra.

- ¿Cuánto dinero recibirá por la venta del café? ____________________

d. Yólotl exportará a Estados Unidos 20 barriles de miel con 200 litros cada uno, en garrafas de 2 galones.

- ¿Cuántas garrafas enviará? ____________________

e. Una barra de chocolate de 1.5 libras.

- ¿Cuántas onzas tiene? ____________________

f. Catalina avanza 6 yardas con 8 pasos.

- ¿Cuántos pasos necesita para avanzar 25 metros? ____________________

> Compartan con otras parejas sus resultados, estrategias y dudas si es que las hay.

Trabaja con...

Realicen en equipo las siguientes tablas.

Usen una hoja electrónica de cálculo para hacer tres tablas de equivalencias en medidas de longitud.

Observen bien las fórmulas que se usarán.

	A	B	C
1	Equivalencias en unidades de longitud		
2	Sistema inglés		SI
3	Pulgadas	Yardas	Centímetros
4		=A4/36	=A4*2.54
5	Sistema inglés		SI
6	Yardas	Pulgadas	Centímetros
7		=A7*36	=B7*2.54
8	SI	Sistema inglés	
9	Centímetros	Pulgadas	Yardas
10		=A10/2.54	=B10/36
11			

Cuando escriban alguna cantidad en cualquiera de las celdas verdes, la hoja calculará automáticamente la equivalencia en las otras unidades de medida.

Elaboren otras tablas para calcular las equivalencias en medidas de capacidad y de masa de ambos sistemas de medidas.

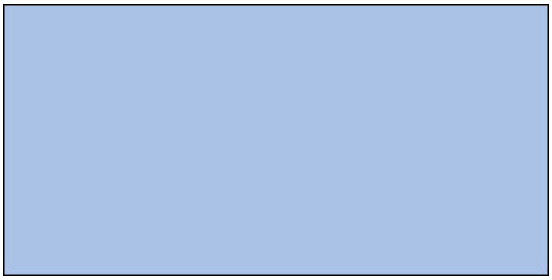
> En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.

> Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

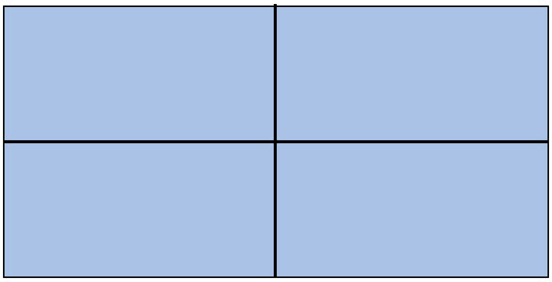
De manera individual resuelve los problemas. Registra tus procedimientos y respuestas.

1. Escribe cuáles pueden ser las dimensiones de la siguiente figura para que tenga un perímetro de

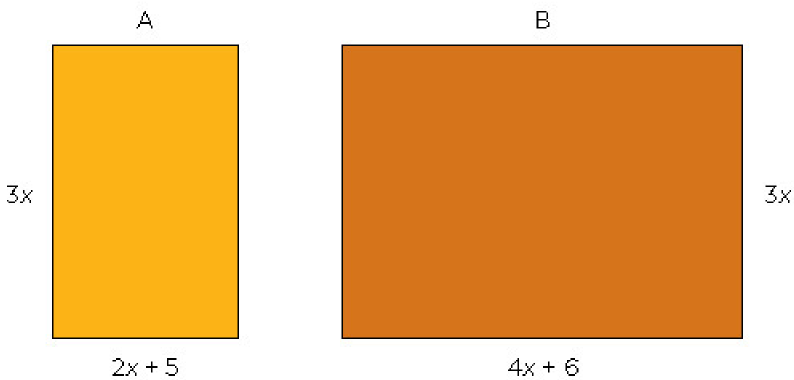
$4x + 6y + 18$



2. Si el rectángulo se dividiera de la siguiente manera, ¿cuáles serían las dimensiones de cada rectángulo resultante?

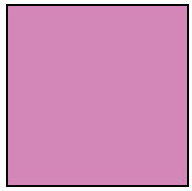


3. Pamela ha recibido en su carpintería un pedido de tablas con las siguientes medidas:



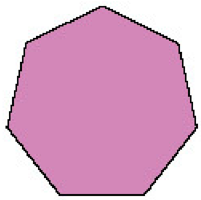
- Hará una tarima con 2 tablas del tipo A y una tabla del tipo B.
- Escribe una expresión algebraica que indique el perímetro de la tarima.
- Escribe también dos expresiones algebraicas equivalentes del área de la tarima resultante.

4. Escribe dentro del paréntesis la letra que corresponda.



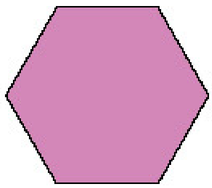
(   )

a. Desde un vértice se pueden trazar 3 diagonales, el número total de diagonales es de 9



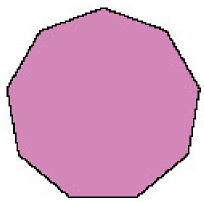
(   )

b. Desde un vértice se pueden trazar 6 diagonales, el número total de diagonales es de 27



(   )

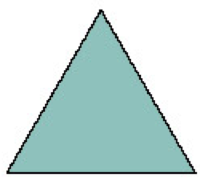
c. Desde un vértice se pueden trazar 4 diagonales, el número total de diagonales es de 14



(   )

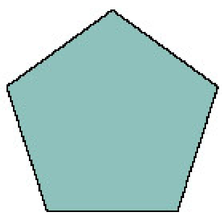
5. Escribe dentro del paréntesis la letra que corresponda.

a. Sus ángulos centrales miden 72° y los ángulos interiores 108°



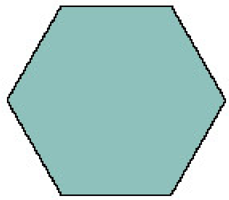
(   )

b. Sus ángulos centrales miden 60° y la suma de sus ángulos internos es de 720°

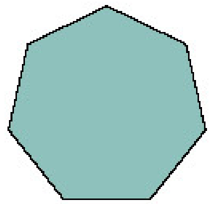


(   )

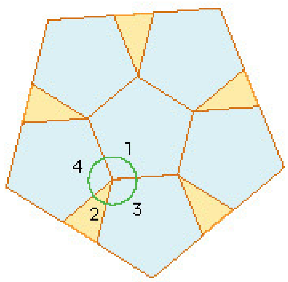
(El reactivo 5 continúa en la página siguiente.)


( )

a. Sus ángulos centrales miden 120° y sus ángulos exteriores 120°


( )

6. Se quiere teselar un piso con los siguientes polígonos, escribe:



- ¿Cuánto mide el ángulo 1?
- ¿Cuánto mide el ángulo 2?
- ¿Cuánto suman las medidas de los ángu
- los 1, 2, 3 y 4?

7. ¿Cuál de las siguientes medidas es equivalente a un litro?

- 1 mm^3
- 1 cm^3
- 1 dm^3
- 1 m^3

8. Víctor va en su auto a una velocidad de 95 millas por hora, ¿cuál es su velocidad en km?

- Entre 10 y 49 $\frac{km}{h}$
- Entre 50 y 100 $\frac{km}{h}$
- Entre 101 y 120 $\frac{km}{h}$
- Entre 121 y 160 $\frac{km}{h}$

9. Un corredor de futbol americano avanzó 60 yardas, ¿cuántos metros avanzó?

- Entre 20 y 50 metros
- Entre 51 y 100 metros
- Entre 101 y 120 metros
- Entre 121 y 150 metros

10. Un contenedor tiene 2 642 galones de líquido, ¿a cuántos litros equivale?

- Entre 100 y 1 500 litros
- Entre 1 501 y 5 000 litros
- Entre 5 001 y 7 500 litros
- Entre 7 501 y 10 000 litros

11. El piso de un kiosco tiene forma de un hexágono regular con apotema de 3.46 m y lámparas cada 2 m en su perímetro, de tal forma que cada lado tiene tres lámparas con una en cada vértice del hexágono.

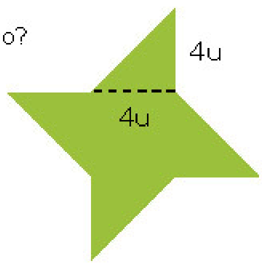
- ¿Cuánto mide el perímetro del piso del kiosco?
  - 18 m
  - 24 m
  - 36 m
  - 48 m
- ¿Cuánto mide el área del piso del kiosco?
  - 6.92 m^2
  - 13.84 m^2
  - 20.76 m^2
  - 41.52 m^2

12. Un becerro está atado a un poste con una cuerda de 10 m. El becerro puede girar libremente alrededor del poste y a todo lo que da la longitud de la cuerda. Toma $\pi = 3.14$.

- ¿Cuál es el área en la que el becerro puede pastar?
  - 10 m^2
  - 31.40 m^2
  - 100 m^2
  - 314 m^2
- ¿Cuál es la distancia que recorre el becerro en cada vuelta completa con la cuerda extendida en su totalidad?
  - 10 m
  - 31.4 m
  - 20 m
  - 62.8 m

13. ¿Cuánto mide de área el siguiente polígono?

- 20 u^2
- 24 u^2
- 28 u^2
- 48 u^2



Trimestre 3

La capacidad para razonar y actuar en términos de probabilidad se reconoce hoy en día como una necesidad de la vida diaria. Es frecuente que, tanto en cuestiones personales como sociales, se requiera que interpretemos información basada en supuestos probabilísticos, que al expresar una idea debamos incluir aspectos de azar o probabilidad, o que tengamos que tomar decisiones sin que estén evaluados con cierta precisión los resultados posibles. Por ejemplo, en cualquier momento podríamos enfrentarnos a situaciones como las siguientes:

- Al ir a comprar un auto, nos enteramos que el modelo en que estamos interesados está entre los más robados. ¿Qué será más conveniente: seguir adelante, o mejor buscar otro tipo de auto?
- El médico nos informa que si tenemos sobrepeso y no hacemos ejercicio regularmente, la posibilidad de tener problemas cardiacos se incrementa un 50%. Seguramente llevaremos una vida más sana si nos ejercitamos y cuidamos lo que comemos, pero, ¿cuál es la probabilidad de tener problemas cardiacos a nuestra edad?

En este tercer trimestre, tendrás la oportunidad de abordar varios temas completamente nuevos, además de profundizar en otros que ya has trabajado anteriormente. Los hay tanto de geometría como de análisis de datos.

Entre los primeros están la construcción de prismas y cilindros, así como cálculos sobre su volumen; el perímetro de polígonos y del círculo; el cálculo de áreas de polígonos regulares e irregulares, para llegar al área del círculo.

En análisis de datos se introduce el concepto de probabilidad teórica, que podrás relacionar con el de probabilidad frecuencial o experimental que ya conoces. Para describir conjuntos de datos usarás medidas de tendencia central y de dispersión de los datos, y tendrás más herramientas gráficas —como histogramas, polígonos de frecuencias y gráficas de línea.

22 Por la orilla

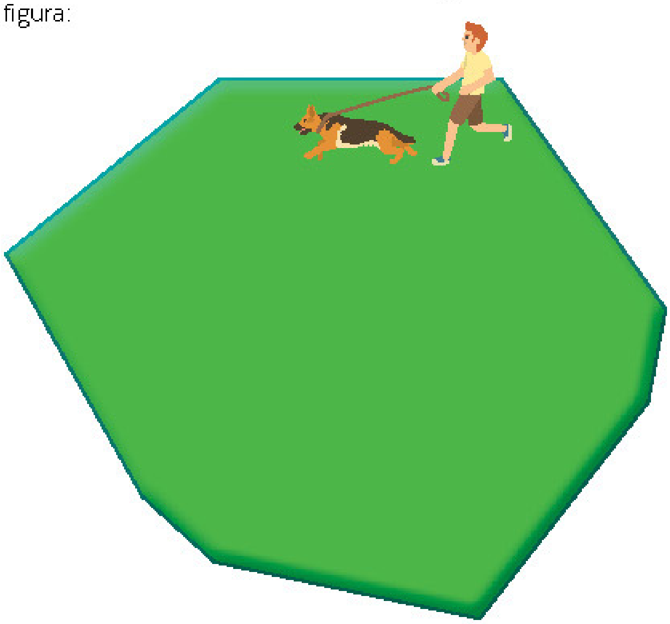
En esta sesión, aprenderás qué es y cómo calcular el perímetro de polígonos regulares e irregulares y el perímetro del círculo.

Recuperamos lo aprendido

1. **En parejas, resuelvan el siguiente problema.**

Capuchino es un perro al que le gusta correr alrededor del parque y hoy por la mañana dio dos vueltas.

En el parque los lados cortos miden 15.5 m y los largos el triple que los lados cortos. Observen la figura:



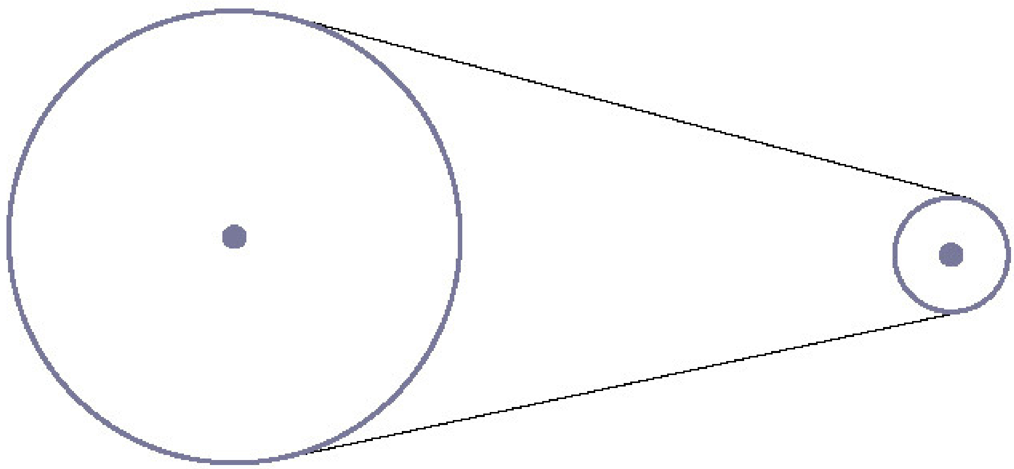
- ¿Cuántos metros corrió Capuchino? ______
- ¿Cuánto corrió en una vuelta? ______
- ¿Cuánto en dos vueltas? ______
- ¿Qué operaciones usaron para resolver el problema? ______
- Escriban otra forma de resolver el problema. ______
- Si el octágono en el que corrió el Capuchino hubiera sido regular, ¿qué características tendría? ______

› Comparen sus respuestas y estrategias con las de otras parejas.

Construyo algo nuevo

1. **En equipos de tres resuelvan el siguiente problema.**

La polea grande tiene un diámetro de 40cm que es cuatro veces más grande que el de la polea pequeña y una banda que las une, las mueve simultáneamente. Tomen el valor de π como 3.14.



- Ustedes serán el equipo. Hagan una estimación a cada pregunta, anótenla en la tabla y después pregunten a otros dos equipos su estimación a cada pregunta y llenen la tabla anotando la estimación en las columnas correspondientes.

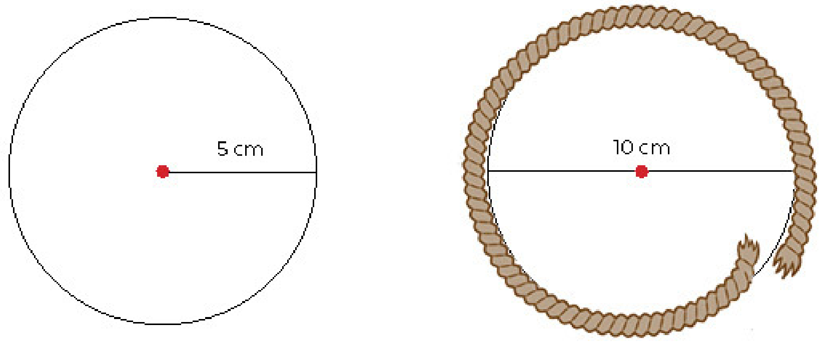
	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
¿Cuánto mide de perímetro la polea grande?			
¿Cuánto mide de perímetro la polea chica?			
¿Cuántos giros da la polea chica mientras la grande da un giro completo?			

- Ahora, hagan los cálculos necesarios para saber las respuestas correctas a las preguntas y observen cuál de los tres equipos estuvo más cerca en sus estimaciones.

> **Expongan su trabajo grupalmente y, en caso necesario, ayuden a sus compañeros para que todos comprendan cuál es la relación de giro entre las poleas.**

2. **Continúen con el mismo equipo y realicen la siguiente actividad.**

- Tracen en su cuaderno un círculo con radio de 5 cm (recuerden que un radio en un círculo, mide la mitad del diámetro) para que quede un círculo de 10 cm de diámetro, la cual será la medida de la polea chica. Vean las figuras en la página siguiente.

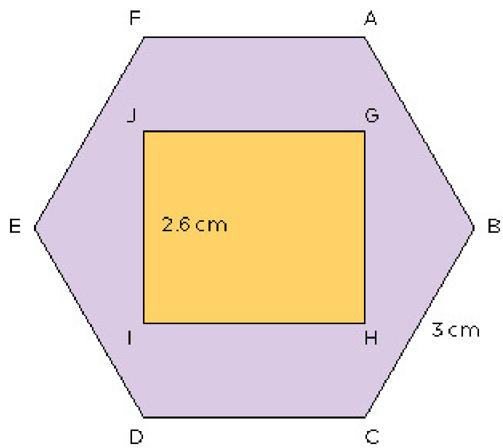


- Con un cordel midan cuidadosamente el contorno del círculo.
- Midan con una regla el tamaño del cordel que cubrió el contorno y anoten la medida.
- ¿Cuánto medirá el contorno de la polea chica? ______________________

  ¿Cuánto gira en una vuelta? ______________________
- Comparen la medida del contorno con el diámetro del círculo. ¿Cuántas veces cabe el diámetro en la medida del contorno? ______________________
- En el patio de su escuela y con ayuda de su docente tracen un círculo con radio de 20 cm y hagan lo mismo que con la polea menor. Observen si el diámetro cabe el mismo número de veces que con la polea chica.

> **Compartan con otros equipos sus resultados y estrategias.**

3. Observen las figuras y en equipos respondan las preguntas.



Diccionario

Perímetro
Medida del contorno o la orilla de una figura.

- ¿El cuadrilátero dentro del hexágono es un cuadrado? ______________________

  ¿Cómo lo saben? ______________________

  ____
- ¿Cuánto mide el **perímetro** del cuadrilátero? ______________________
- ¿Cuánto mide el perímetro del hexágono? ______________________

> **Comparen sus respuestas y estrategias con las de otros equipos.**

Hagamos una reflexión

Desde primaria, sabes que los perímetros se calculan en unidades lineales y basta sumar las medidas de cada uno de los lados de la figura o en el caso del círculo aplicar la fórmula correspondiente.

En el círculo

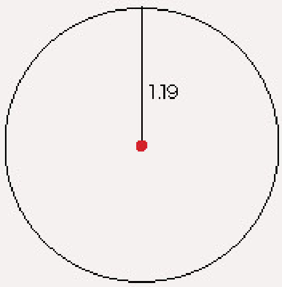
Para calcular la longitud de una circunferencia (perímetro del círculo) es necesario conocer la longitud de su radio o de su diámetro.

Si se coloca la longitud del diámetro a lo largo de la circunferencia, cabe tres veces y queda una pequeña parte sin cubrir, esto es, el diámetro cabe un número —llamado pi, el que se representa con la letra griega del mismo nombre: pi = π— de veces en la circunferencia. π es un número irracional, no puede obtenerse como resultado de dividir dos números enteros, y se caracteriza por tener una cantidad infinita de cifras decimales.

Aunque π tiene una expresión decimal infinita, la aproximación más cercana con cuatro cifras decimales es 3.1416, o bien, sólo con dos cifras decimales: 3.14.

El factor de proporcionalidad entre el perímetro de un círculo y su diámetro es pi. Esto se expresa de la siguiente manera:

Longitud de la circunferencia = pi × diámetro, esto es $P = \pi D$
o en términos del radio se expresa como $P = \pi 2r$.



$P = \pi D$ $\quad$ $P = 3.14 \times 2.38 = 7.4732$

$P = \pi 2r$ $\quad$ $P = 3.14 \times 2 \times 1.19 = 7.4732$

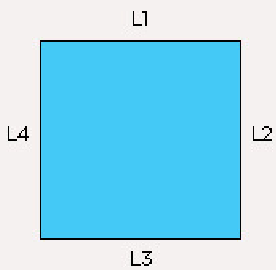
- ¿Cuántas veces cupo? ______________________________
- ¿Quedó un número exacto de veces? ______________________________

El factor de proporcionalidad entre el perímetro de un círculo y su diámetro es pi. Esto se expresa de la siguiente manera:

Longitud de la circunferencia = pi × diámetro

En los polígonos regulares

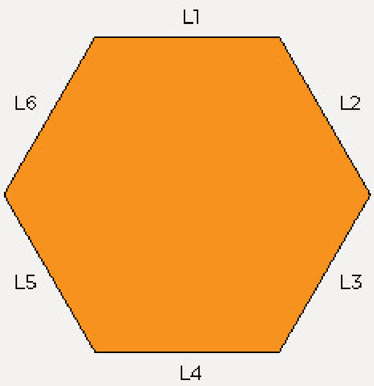
Por ejemplo, en el caso de un cuadrado, para calcular su perímetro se pueden usar las siguientes fórmulas:



_____ + _____ + _____ + _____ = p o también _____ × _____ = p

En los casos de los polígonos regulares, la suma de los lados puede expresarse como una multiplicación.

En el hexágono, el perímetro se puede expresar como:



_____ + _____ + _____ + _____ + _____ + _____ = p, o también _____ × _____ = p

- ¿Cuál lado eligieron para expresarlo como multiplicación? _______________
- ¿Pudieron elegir otro? _________ ¿Por qué? _______________

____

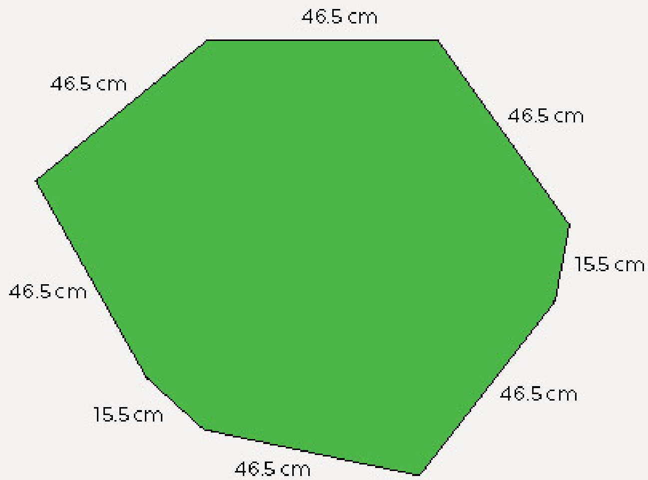
La siguiente fórmula se puede emplear para calcular el perímetro de cualquier polígono regular:

N × l = p, donde N es el número de lados y l la longitud de uno de ellos.

En los polígonos irregulares

Para el cálculo del perímetro de los **polígonos** irregulares, no hay una fórmula que sirva para todos, bastará con sumar sus lados o en caso posible, usar suma y multiplicación.

Por ejemplo:



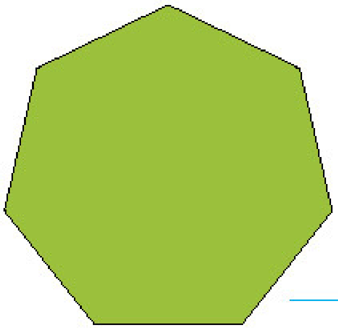
_____ + _____ + _____ + _____ + _____ + _____ + _____ + _____ = p

o también como (_____ × _____) + (_____ × _____) = p

Diccionario

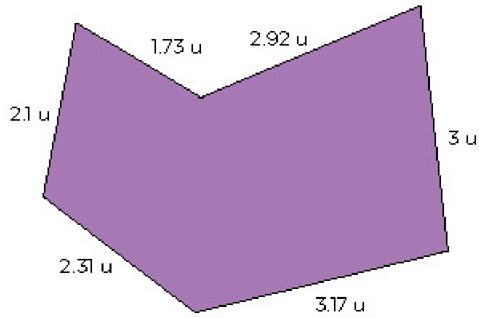
Polígono
Figura geométrica cerrada con varios ángulos internos. Si tiene todos sus ángulos internos iguales será un polígono regular o equilátero.

4. **Encuentra la medida de los lados del heptágono y el perímetro de las otras dos figuras.**

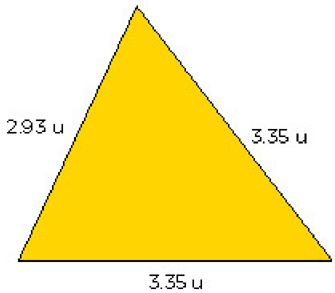


_______ u

P = 12.32 u



P = _________ u



P = _________ u

- ¿Qué procedimiento utilizaste? ¿Por qué? ______________________________

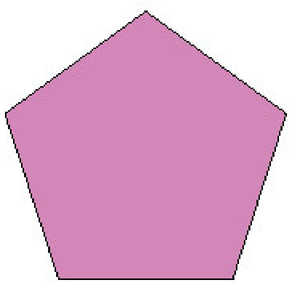
____

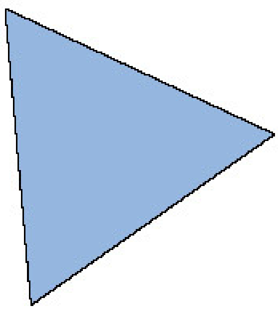
> Compara tus respuestas con las de un compañero; verifíquenlas y corrijan sus respuestas en caso de haber errores.

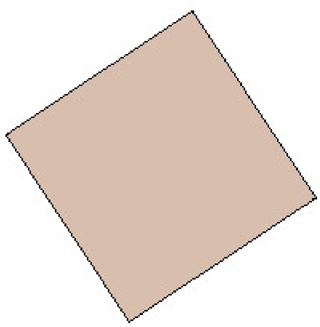
Para finalizar

1. **Trabajen en parejas y calculen lo que se solicita.**

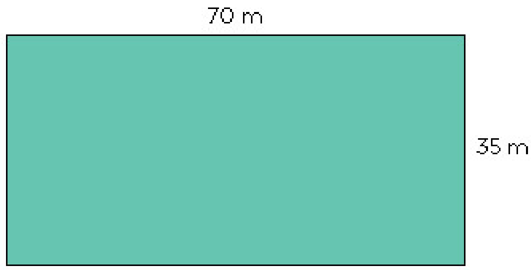
a. Valentina quiere cercar un corral, para ello tiene 9.6 metros de tela de alambre. Escriban en los siguientes diseños las medidas que tendría cada corral, suponiendo que cada vez usa toda la tela de alambre.







b. El domingo, Caro y Cory llevaron a caminar a su perro Bombo y primero dio dos vueltas al parque y después una más.

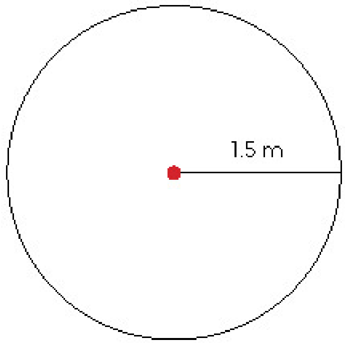


- ¿Cuántos metros caminó Bombo en total? ______

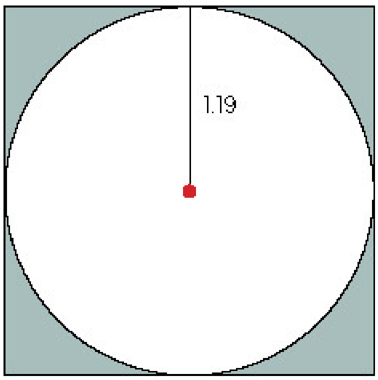
Isaac corre en el mismo parque al que fue Bombo y dice que en cinco días ha corrido 4 200 m, y que siempre corre lo mismo.

- ¿Cuántas vueltas le da al parque en un día? ______

c. René quiere coserle un listón al contorno del mantel. ¿Cuánto listón necesita?



d. ¿Cuánto mide el perímetro del círculo? Y ¿cuánto el del cuadrado?



e. En su cuaderno, inventen problemas que impliquen el cálculo de perímetros en polígonos regulares, irregulares o del círculo y resuélvanlos.

> **Compartan ante todo el grupo sus respuestas y estrategias.**

2. De manera individual, responde las preguntas.

- ¿Qué es el perímetro de una figura? ____________
- ¿Cómo se calcula el perímetro de un círculo? ____________
- ¿Cómo calculas el perímetro de un círculo si sólo conoces la medida del radio? ____________
- ¿Qué significa π en el cálculo del perímetro del círculo? ____________
- ¿Cuál es el valor de π redondeado a 2 cifras decimales? ____________ ¿y a cuatro decimales? ____________
- ¿Cómo se calcula el perímetro de cualquier polígono de lados rectos? ____________
- ¿Cómo se calcula el perímetro de polígonos regulares? ____________

› Compara tus respuestas con las de un compañero; verifíquenlas y corrijan sus respuestas en caso de haber errores.

Trabaja con...

Trabajen en equipos.

En una hoja electrónica de cálculo, construyan una tabla que les permita calcular el radio, el diámetro o la longitud de la circunferencia dado uno de ellos.

	A	B	C
1	El círculo		
2	Radio	Diámetro	Perímetro
3		=A3*2	=3.1416*B3
4	=B4/2		=3.1416*B4
5	=B5/2	=C5/3.1416	
6			

En las celdas verdes, al anotar el dato conocido, automáticamente se calcularán los otros valores.

Comenten que significan cada una de las fórmulas escritas. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

Usen las tablas para resolver problemas.

› En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.

› Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

23 El área de un polígono

Conoces ya el uso de las fórmulas del cálculo de área de triángulos y cuadriláteros, ahora las usarás para calcular el área de polígonos irregulares y regulares.

Recuperamos lo aprendido

1. **En parejas escriban brevemente en su cuaderno:**

- ¿Qué significa perímetro? ____________________
- ¿Cómo se calcula el perímetro de un polígono regular? ____________________
- ¿Cómo se calcula el perímetro de un polígono irregular? ____________________
- ¿Qué diferencia hay entre calcular el perímetro de un polígono y calcular su área? ____________________
- ¿Cómo calculan el área de un cuadrado, de un rectángulo o de romboide? ____________________
- ¿Cómo calculan el área de un triángulo? ____________________

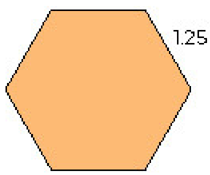
> Comparen sus respuestas con las de otras parejas.

Construyo algo nuevo

1. **En equipos de tres resuelvan lo siguiente:**

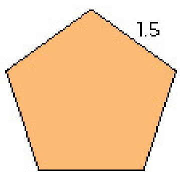
Víctor tiene varios moldes para hacer galletas, chocolates y dulces de amaranto, y quiere saber el área de la base de cada uno para planear cómo empacar sus productos.

- Observen los moldes. En los que sea posible, con los datos que tienen, calculen lo que se pide.



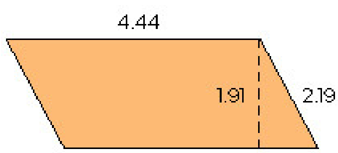
P = ____________

A = ____________



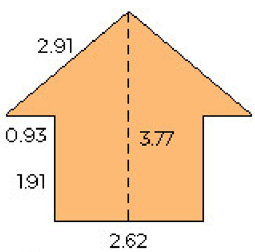
P = ____________

A = ____________



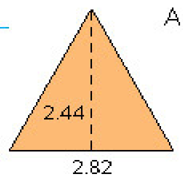
P = ____________

A = ____________



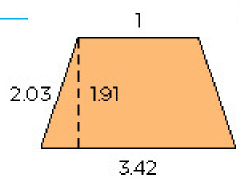
P = ____________

A = ____________



P = ____________

A = ____________



P = ____________

A = ____________

- ¿Cuál es el molde que ocupará mayor área? ¿Por qué? ____________________

  ____
- ¿Cuál es el molde que ocupará menor área? ¿Por qué? ____________________

  ____
- ¿Hay moldes que tengan áreas equivalentes? ____________________

  ____
- ¿Cómo calculan el área de cada molde? ____________________
- ¿Cómo calcularon el área del molde en forma de flecha? ____________________

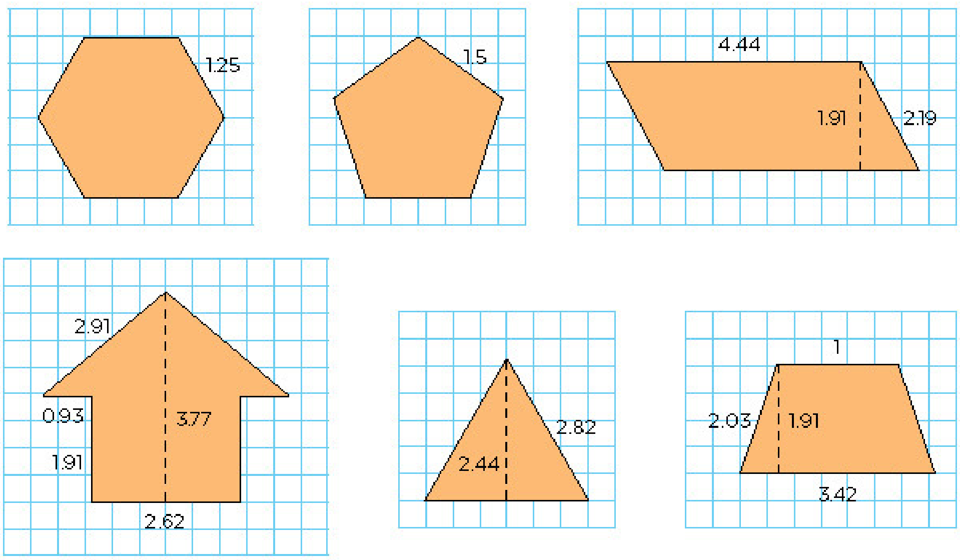
  ____
- ¿En algún caso les faltaron datos para el cálculo? ¿Cuáles? ____________________
- ¿En el caso de los polígonos regulares con el mismo perímetro, tendrán áreas equivalentes? ____________________

> Comparen con otros equipos sus respuestas y estrategias, en caso necesario justifiquen sus respuestas.

> Si saben de una receta para elaborar galletas, chocolates o gelatinas compártanla en el grupo.

2. Con el mismo equipo, lean y contesten las preguntas.

Víctor decidió hacer dibujos de los moldes cuadriculando cada uno.



- Como pueden ver, aunque en algunos casos no se aprecia exactamente el área del polígono, sí se observa que las áreas son diferentes y que el triángulo es el que tiene menos área porque contiene menos cuadrados.

  En algunos polígonos se puede aplicar una fórmula para calcular su área, pero en otros casos, como el del molde en forma de casa o flecha, hay que descomponerlos en otras figuras conocidas como triángulos o cuadriláteros.

- ¿Qué datos faltan para poder calcular el área del pentágono y del hexágono?

- ¿Qué opinan del método de cuadricular para calcular el área?

> Compartan con otros equipos sus resultados y estrategias.

3. En equipos realicen la siguiente actividad.

a. Van a trazar en el patio de su escuela polígonos diferentes que tengan de perímetro 1.80 m; esperen la indicación de su docente. Sigan las instrucciones:

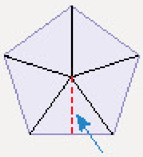
- Primero, dibujen a escala en su cuaderno las posibilidades de polígonos que encuentren.
- Para cada polígono, anoten las medidas de sus lados, ángulos, de la **apotema** en su caso y escriban si es regular o irregular; también calculen el área.
- Una vez que definan los polígonos que trazarán, bajo la indicación de su docente, salgan al patio y trácenlos.
- Anoten en su cuaderno qué datos necesitaron para trazar los polígonos y cuáles no fueron indispensables.
- Vuelvan a calcular las áreas y comparen con los cálculos que hicieron en el cuaderno.
- Anoten en su cuaderno las dificultades que se les presentaron para el trazo y para el cálculo.

b. Respondan.

- ¿Cuál de los polígonos tuvo menor área?
- ¿Cuál de los polígonos tuvo mayor área?
- ¿Consideran que el perímetro de un polígono está directamente relacionado con su área? Expliquen su respuesta.

Diccionario

Apotema
Distancia más corta del centro de un polígono regular al punto medio de uno de sus lados.

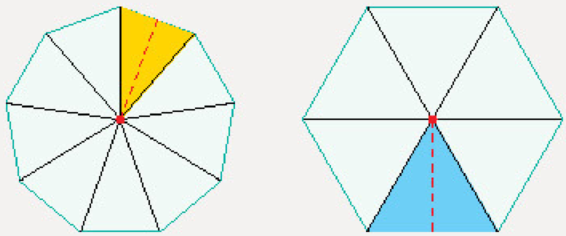


> Comparen sus respuestas y estrategias con las de otros equipos. En caso necesario ayuden a otros equipos a trazar los polígonos y a calcular su área.

Hagamos una reflexión

Calcular el **área de un polígono** es conocer cuántas unidades cuadradas le caben.

Los **polígonos regulares** se pueden dividir en tantos triángulos congruentes (de la misma forma y del mismo tamaño) como lados tengan y se puede conocer su área calculando el área de uno de sus triángulos y multiplicándola por el número de triángulos que tenga:



$A = \frac{b \times h}{2} \times 9$ $A = \frac{b \times h}{2} \times 6$ $A = \frac{b \times h}{2} \times 5$

Observen que la altura de cada triángulo marcado en los polígonos es a la vez la apotema del polígono, entonces es posible escribir en las fórmulas para el cálculo de su área *a* (de apotema) en lugar de *h* (de altura). Háganlo.

$A = \frac{b \times \square}{2} \times 9$ $A = \frac{b \times \square}{2} \times 6$ $A = \frac{b \times \square}{2} \times 5$

En el pentágono se calcula su perímetro como $p = b \times 5$ en donde *b* representa la medida de uno de los lados, entonces en la fórmula en la que ya sustituyeron *h* (altura) por *a* (apotema) se puede sustituir $b \times 5$ por *p*. Háganlo.

A = ________________

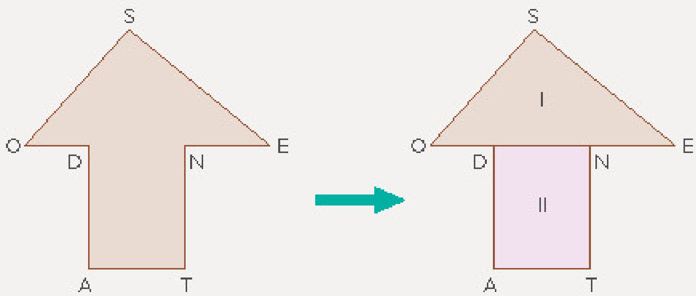
Hagan el mismo análisis con los otros dos polígonos y escriban las nuevas fórmulas.

- En equipos, comenten por qué también es posible calcular el área de cualquier polígono regular al multiplicar su perímetro por la apotema y dividir entre 2, esto es:

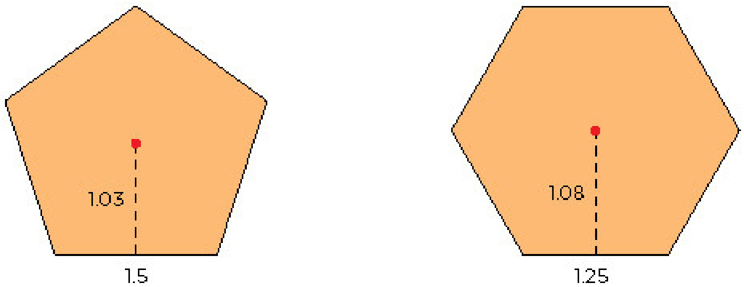
$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

En el caso de los **polígonos irregulares**, estos se separan en otros polígonos conocidos y se calculan sus áreas, y el área total será igual a la suma de las áreas parciales.

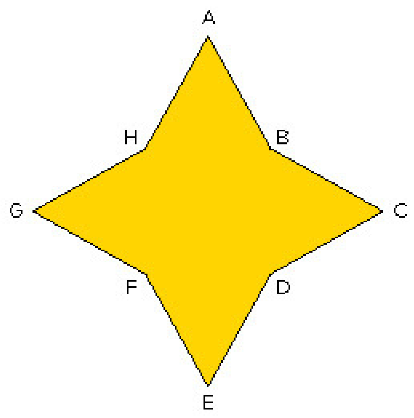
Por ejemplo, el área total del polígono SENTADO, es equivalente al área de los polígonos I y II:



4. **Retomen el problema de los moldes. Con los datos de las apotemas, calculen el área del pentágono y del hexágono.**



5. **Dividan el polígono ABCDEFGH en polígonos conocidos y calculen su área.**



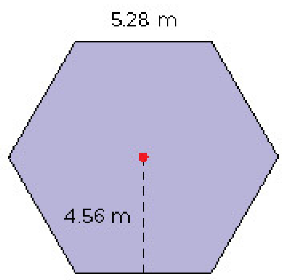
Para finalizar

1. **En parejas resuelvan los siguientes problemas.**

a. Una cancha de futbol profesional tiene 75 m de ancho por 110 m de largo.

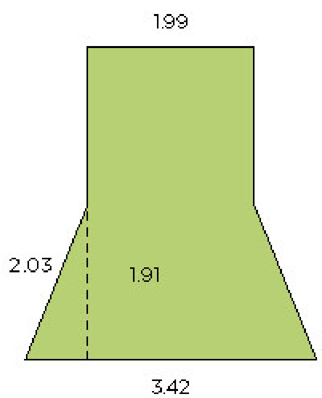
- ¿Cuánto mide de área la cancha? ________________________

b. Se quiere cubrir de loseta el piso de un kiosco con forma hexagonal. La loseta está empacada en cajas de 1.5 m^2.



- ¿Cuántas cajas de loseta se tendrán que comprar? ________________________

c. Inventen un problema en el que consideren el siguiente polígono irregular y resuélvanlo.



d. En su cuaderno inventen dos problemas más y resuélvanlos: uno que involucre polígonos regulares y otro que involucre polígonos irregulares.

> Compartan ante todo el grupo sus respuestas y estrategias.

2. **De manera individual, responde las preguntas.**

- ¿Cómo se calcula el área de un triángulo? ______________________
- ¿Cómo se calcula el área de un paralelogramo? ______________________
- ¿Cómo se calcula el área de un polígono regular? ______________________
- ¿Cómo se calcula el área de un polígono irregular con lados rectos? ______________________

____

> Compara tus respuestas con las de un compañero; verifíquenlas y corrijan sus respuestas en caso de haber errores.

Diccionario

Paralelogramo
Cuadrilátero con dos pares de lados paralelos como el cuadrado, el rectángulo, el rombo y el romboide.

Trabaja con...

Trabajen en equipos.

Elaboren las siguientes tablas y úsenlas para resolver problemas que involucren calcular el área de triángulos, de paralelogramos, de polígonos regulares o de polígonos irregulares.

H19

	A	B	C
1		Área de triángulos	
2	Base	Altura	Área
3			=(A3*B3)/2
4		=2*C4/A4	
5	=2*C5/B5		
6		Área de paralelogramos	
7	Base	Altura	Área
8			=A8*B8
9		=C9/A9	
10	=C10/B10		
11		Área de polígonos regulares	
12	Perímetro de la base	Apotema	Área
13			=(A13*B13)/2
14		=2*C14/A14	
15	=2*C15/B15		
16			

En las celdas verdes anotarán los valores conocidos y en las celdas azules se calculará el valor desconocido.

Analicen en equipo cada una de las fórmulas utilizadas y en caso de no entender alguna de ellas, consulten con otros equipos.

> En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.

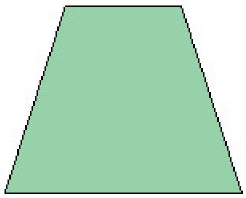
> Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

24 Área del círculo

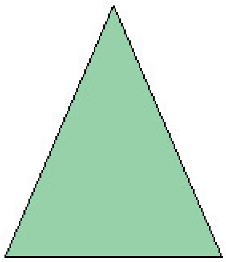
Aprendiste ya cómo calcular la longitud de la circunferencia y ahora aprenderás cómo calcular el área del círculo.

Recuperamos lo aprendido

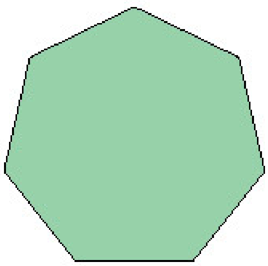
1. **En parejas, relacionen las columnas escribiendo en los paréntesis las letras que correspondan.**



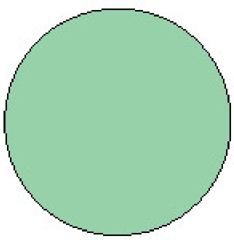
( )
( )
( )



( )
( )
( )



( )
( )
( )



( )
( )

a. $2*L1 + L2 = P$

b. $L + L + L = P$

c. $L + L + L + L + L + L + L = P$

d. $A = \frac{b*h}{2}$

e. $A = \frac{(B+b)*h}{2}$

f. $\pi * 2 * r$

g. $7 * L = P$

h. $2 * L1 + L2 + L3 = P$

i. $\pi * D$

j. $L1 + L2 + L3 + L4 = P$

k. $\frac{P*a}{2} = A$

› Comparen sus respuestas con las de otras parejas.

Construyo algo nuevo

1. **En equipos resuelvan el siguiente problema.**

   a. Un becerro está atado con una cuerda a un poste. Si la longitud de la cuerda es de 5 metros...

   - ¿Cuál es el perímetro máximo por el que puede caminar y dar la vuelta el becerro? ____________
   - ¿En cuántos metros cuadrados puede pastar? ____________
   - En el caso de una cuerda con el doble de tamaño (10 m): ____________
   - ¿El giro máximo es del doble? ¿Cómo lo saben? ____________
   - ¿El área para pastar es del doble? ¿Cómo lo saben? ____________

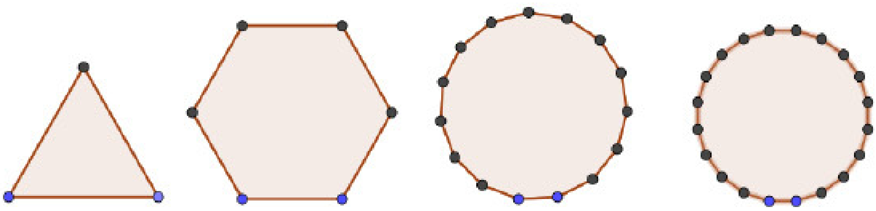
   b. Si la cuerda del becerro fuera de 2.5 m...

   - El giro máximo del becerro en cada vuelta es de: ____________.
   - El área para pastar es de: ____________
   - ¿Cómo varía el área del círculo cuando el radio es el doble o la mitad del original? ____________
   - ¿Cómo varía el perímetro del círculo cuando el radio es el doble o la mitad del original? ____________

> Comparen sus procedimientos y respuestas con las de otros equipos.

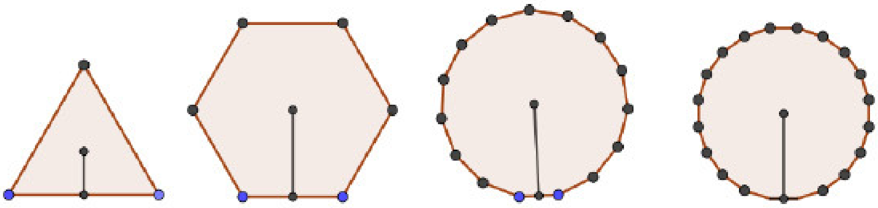
2. **En parejas, realicen lo que se indica.**

   a. Observen cómo cambian los polígonos conforme aumenta su número de lados:



   - Si se continuara aumentando el número de lados, ¿a qué figura se parecería? ____________
   - ¿Se puede considerar al círculo como un polígono regular con muchísimos lados? ¿Por qué? ____________

b. Observen cómo cambia la apotema en los polígonos conforme aumenta su número de lados:



- ¿Se puede considerar al radio de un círculo como la apotema de un polígono de muchísimos lados? ¿Por qué? ____________________
- ¿Qué representa la cuerda del problema? ____________________

c. Observen y completen cómo se aplica la fórmula para el cálculo del área de polígonos regulares en el cálculo del área del círculo.

$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

El cálculo del perímetro del círculo se puede calcular con la fórmula $p = \pi * 2 * r$; pero en lugar de perímetro, en este caso, se puede usar su equivalente $\pi * 2 * r$.

- Escriban nuevamente la fórmula para el cálculo del área de polígonos regulares pero, en lugar de escribir perímetro escriban su equivalente:

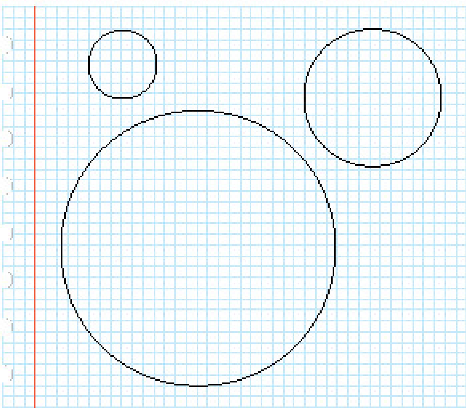
  A = ____________________

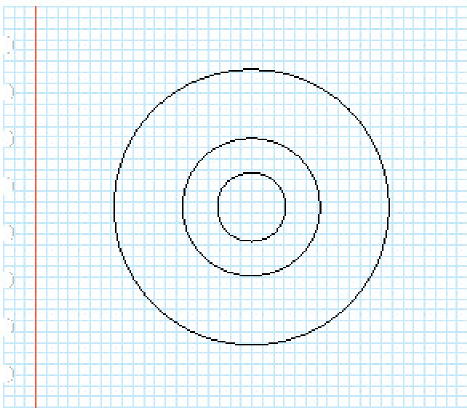
- Ahora bien, ya vieron que cuando el polígono tiene muchísimos lados la apotema es equivalente al radio, entonces escriban nuevamente la fórmula para el cálculo del área de polígonos regulares pero, en lugar de escribir apotema escriban r (radio).

  A = ____________________

d. Finalmente, con ayuda de su maestro o maestra, simplifiquen la última fórmula y debe quedar que para el cálculo del área del círculo es $Ac = \pi * r^2$.

3. En una hoja o en su cuaderno, tracen círculos de 2.5 cm, 5 cm y 10 cm de radio. Pueden o no ser concéntricos.





- Usen sus conocimientos sobre proporcionalidad para calcular el perímetro y el área donde el becerro pasta y camina.
- Calculen el perímetro y el área de cada círculo y observen la diferencia entre ellos.
- ¿Cuánto cambia cada vez el perímetro y el área cuando aumenta el radio? ______

______

______
- ¿Cómo calcularon el perímetro y cómo el área del círculo en el que puede andar y pastar el becerro? ______

______

> Compartan con otras parejas sus resultados y estrategias.

4. En equipos lean y contesten.

En Wiltshire, en Inglaterra, aparecieron diferentes **mandalas** formadas por círculos en los campos agrícolas.

Un hombre llamado John Lundberg demostró que esos círculos eran fácilmente realizados por personas, probó ante las cámaras que estos diseños pueden elaborarse en una noche aplastando la hierba y que para ello sólo se necesita una cinta métrica, un tablón de madera y una cuerda.

Hizo una demostración trazando unos círculos que tenían de tres a ocho metros de diámetro, y después formó figuras cada vez más complicadas.

Algunos aficionados comenzaron haciendo algunas figuras y diseños, y llegaron a alcanzar trazos de hasta 240 m de diámetro.

Diccionario

Mandala
En el hinduismo y en el budismo, dibujo complejo, generalmente circular, que representa las fuerzas que regulan el universo y que sirve como apoyo de la meditación (RAE).

En la figura se representan cuatro círculos trazados, supongan que tienen 5, 10, 15 y 20 metros de radio.

- ¿Qué área abarca el diseño que tiene 5 metros de diámetro? ______
- ¿Qué área abarca el diseño que tiene 10 metros de diámetro? ______

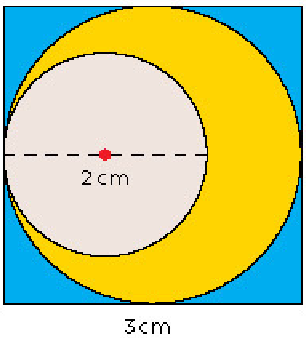
- ¿Qué área abarca el diseño que tiene 15 metros de diámetro? ____________
- ¿Qué área abarca el diseño que tiene 20 metros de diámetro? ____________
- ¿Qué perímetro y qué área abarca un diseño de 240 metros de diámetro? ____________
- Calculen cuántas veces cabría su salón de clases en el diseño de la mandala de 240 m de diámetro. ____________
- Hagan una mandala en el cuaderno, coloréenla y muéstrenla a otros equipos.

> Comparen sus respuestas y estrategias con las de otros equipos.

5. **Regresen al problema del becerro y su área para pastar y revisen sus respuestas y estrategias.**

Para finalizar

1. **En parejas contesten.**



a. Observen la figura:

- ¿Cuánto mide el área del círculo grande? ____________
- ¿Cuánto mide el área del círculo pequeño? ____________
- ¿Cuánto mide el área azul? ____________
- ¿Cuánto mide el área amarilla? ____________

b. Terminen de redactar el problema y resuélvanlo.

Israel necesita un mantel para una mesa circular que tiene un radio de ________.
Quieren que el mantel cuelgue ____________ de la orilla de la mesa.

- ¿Cuánto tiene de área la mesa? ____________
- ¿Cuánto tendrá de área el mantel? ____________

c. Si un becerro atado a un poste, al caminar a su alrededor, puede hacer un recorrido máximo de 31.4 m, ¿cuánto mide el área en la que puede pastar? (consideren el valor de 3.14 para π). ____________

d. En su cuaderno escriban brevemente:

- ¿Cómo se calcula el perímetro de un círculo? ______
- ¿Cómo se calcula el área de un círculo? ______
- ¿Cómo se calcula el perímetro y el área de un círculo si se conoce la medida del radio? ______
- ¿Cómo se calcula el perímetro y el área de un círculo si se conoce la medida del diámetro? ______

> Compartan sus resultados y estrategias con las de otros equipos.

Trabaja con...

Trabajen en equipos.

Construyan en una hoja electrónica de cálculo una tabla, que les ayude a calcular el radio, el diámetro, la longitud de la circunferencia y el área del círculo, cuando se proporcione alguno de éstos datos.

	A	B	C	D
1	Círculo			
2	Radio	Diámetro	Longitud (perímetro) de la circunferencia	Área del círculo
3		=A3*2	=3.14*B3	=3.14*A3*A3
4				
5	Círculo			
6	Radio	Diámetro	Longitud (perímetro) de la circunferencia	Área del círculo
7	=B7/2		=3.14*B7	=3.14*A7*A7
8				
9	Círculo			
10	Radio	Diámetro	Longitud (perímetro) de la circunferencia	Área del círculo
11	=B11/2	=C11/3.14		=3.14*A11*A11
12				
13	Círculo			
14	Radio	Diámetro	Longitud (perímetro) de la circunferencia	Área del círculo
15	=RAIZ(D15/3.14)	=2*A15	=3.14*B15	

Cuando terminen con el diseño de la hoja electrónica de cálculo y tenga escritas todas las fórmulas, bastará que escriban el dato conocido en la celda verde que corresponda y automáticamente los demás valores se calcularán en las celdas azules.

Comenten en el equipo el porqué de cada una de las fórmulas escritas.

> En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.

> Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

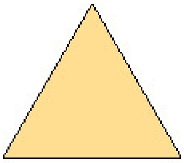
Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Magnitudes y medidas

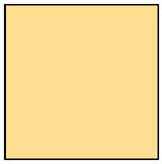
25 Construcción de prismas y cilindros

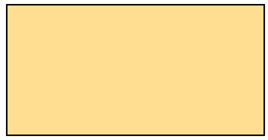
Para continuar con tu aprendizaje, en esta secuencia aprenderás sobre la construcción de los prismas y del cilindro.

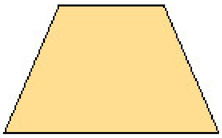
Recuperamos lo aprendido

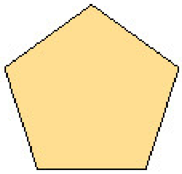
1. **En parejas, escriban el nombre de cada figura geométrica, una fórmula para calcular su perímetro y otra para calcular su área.**

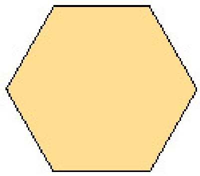


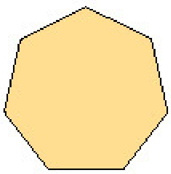


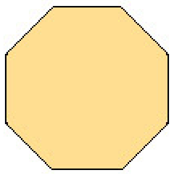


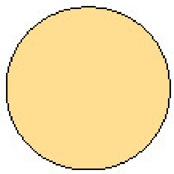










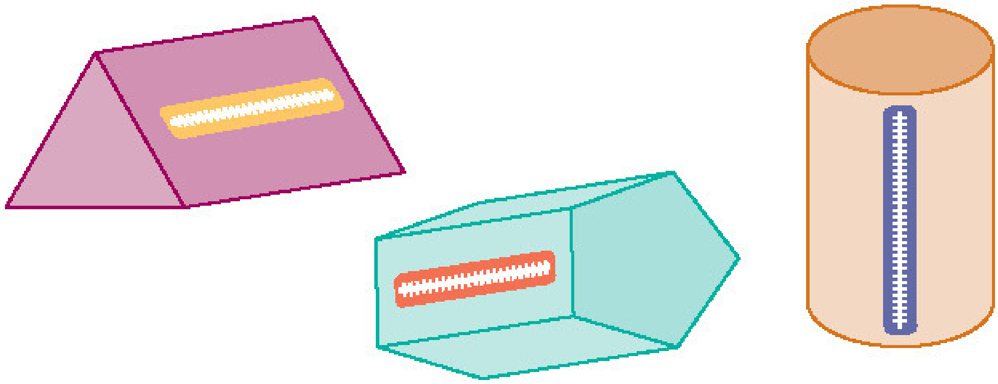


Construyo algo nuevo

1. **En equipos resuelvan el siguiente problema.**

   Reyna, Paco y Valentina quieren hacer diferentes tipos de lapiceras de cartón para regalarlos en el centro comunitario para niños que van a dibujar y a estudiar.

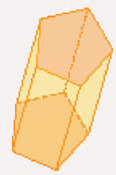
   Los siguientes son los diseños que han pensado elaborar. Pero, ¿cómo elaborarlos?, ¿cómo trazar las plantillas para su construcción?, ¿qué deben tomar en cuenta?



- Expliquen cómo elaborar cada una de las tres lapiceras. ____________________
____
____
____
- En su cuaderno dibujen bocetos de las plantillas para formar las lapiceras.
- Tracen las plantillas en cartulina y arménlas para verificar que sí se pueden formar.
- Comparen con otros equipos sus plantillas. ¿Son todas iguales?

Diccionario

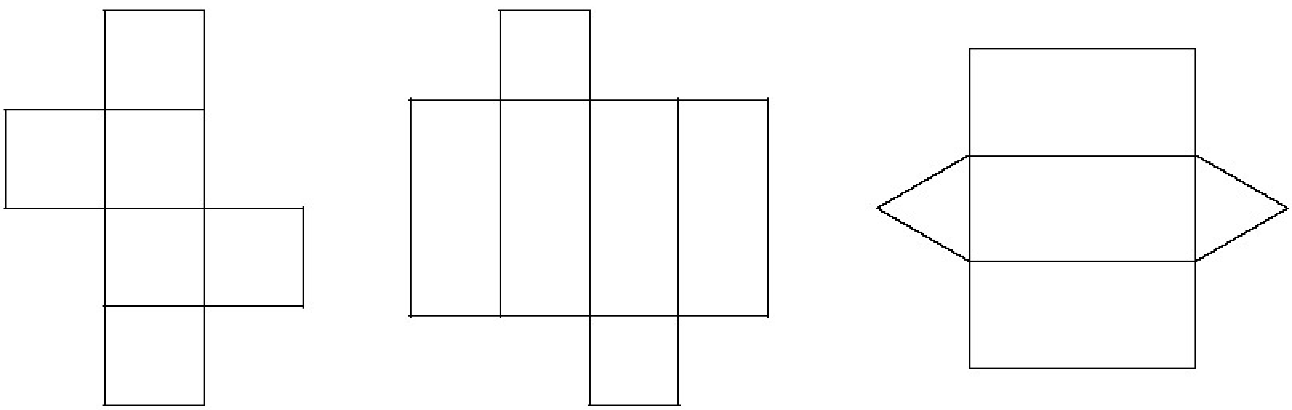
Prisma
Cuerpo limitado por dos polígonos planos, paralelos e iguales, que se llaman bases, y por tantos paralelogramos cuantos lados tengan dichas bases, las cuales, según su forma, dan nombre al prisma: triangular, pentagonal, etcétera (RAE).



> Comenten con otros equipos sus estrategias y muestren los diseños elaborados.

2. **Continúen con los mismos equipos y desarrollen la siguiente actividad.**

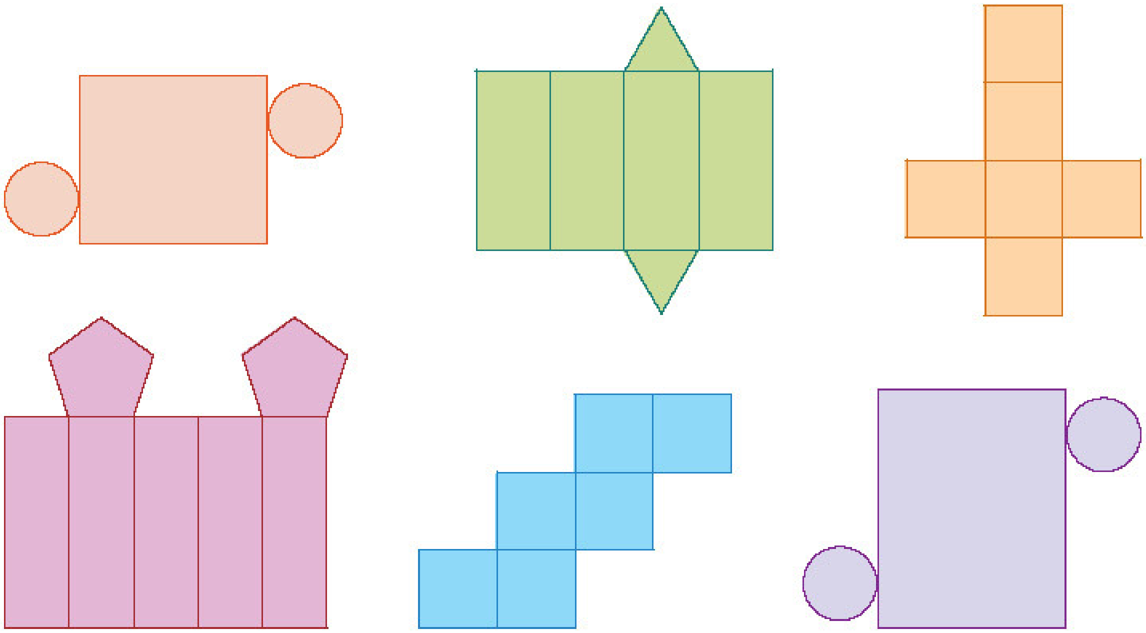
- Consigan envases o cajas diferentes, con cuidado ábranlas y dibujen en su cuaderno las plantillas resultantes. Si hacen los dibujos a escala, cuiden las proporciones.
- Clasifiquen sus plantillas por el número de caras.



- ¿Qué tipos de **prismas** encontraron? ____________________
____
- Comenten en el grupo por qué un tipo de prisma es el más común. Anoten sus comentarios. ____________________
____

3. En equipos, realicen lo que se solicita.

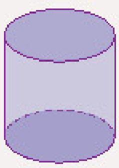
- Encierren las plantillas con las que es posible armar un prisma o un **cilindro** y tachen las plantillas con las que no se puede.



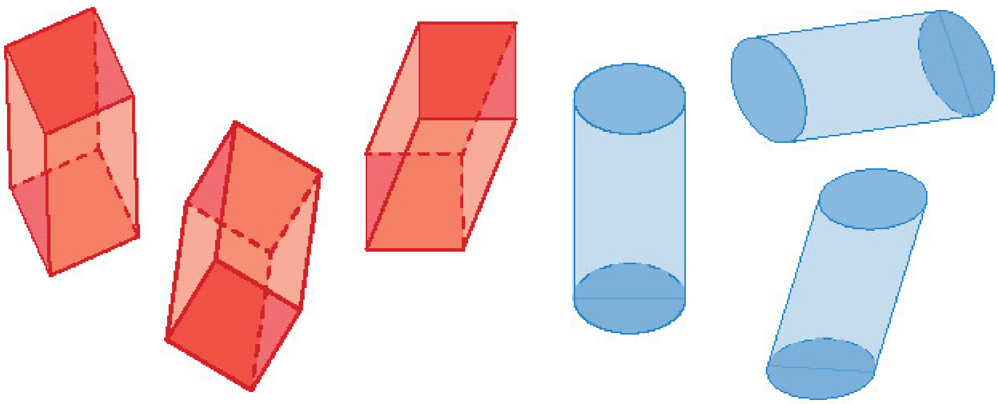
- Tracen las plantillas de las que tengan duda e intenten armar el cuerpo geométrico.
- Escriban en su cuaderno las causas de por qué no fue posible armar algunas plantillas y cómo las arreglarían para que puedan armar cuerpos geométricos.

Diccionario

Cilindro
Cuerpo limitado por dos círculos, paralelos e iguales, que se llaman bases unidos por una superficie curva cerrada.



4. En parejas analicen las imágenes y contesten las preguntas.



a. En el prisma:

- ¿Qué forma tienen las caras opuestas? ¿Tienen el mismo tamaño? ____________

____

- ¿Qué forma tienen las caras laterales? ¿Tienen el mismo tamaño? ____________

____

- ¿Cuántos lados tienen las caras opuestas? ____________________

- ¿Cuántas caras laterales tiene el prisma? ____________________
- ¿Cuáles lados de las caras laterales coinciden con los lados de las caras laterales? ¿Por qué coinciden? ____________________

____

b. En el cilindro:

- ¿Qué forma tienen las caras opuestas? ¿Tienen el mismo tamaño? ____________________

____

- ¿Cuántas caras laterales tiene el cilindro? ____________________
- ¿Qué relación existe entre el perímetro de la base y la cara lateral? ____________________

____

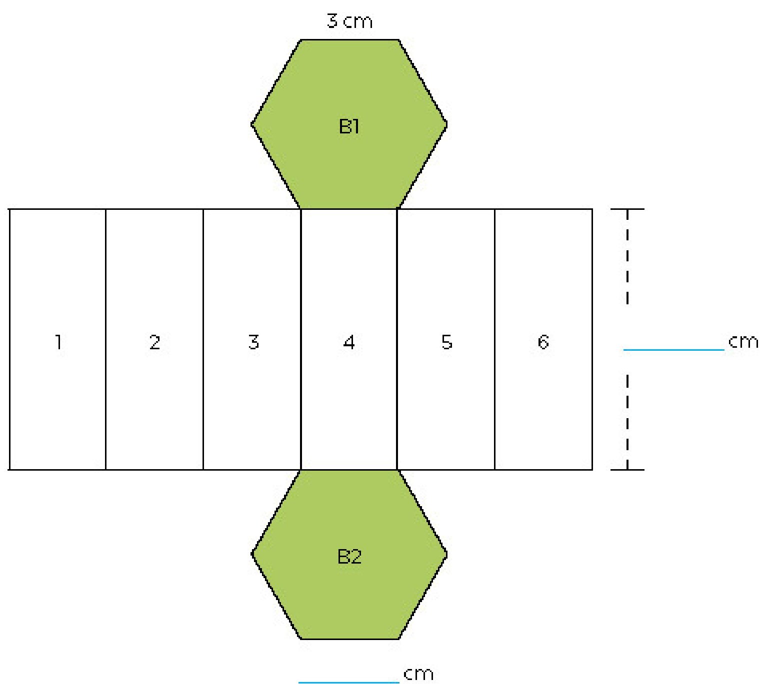
- El trazo de las caras opuestas o bases al construir un prisma o un cilindro define la medida de las caras laterales? ¿Por qué? ____________________

____

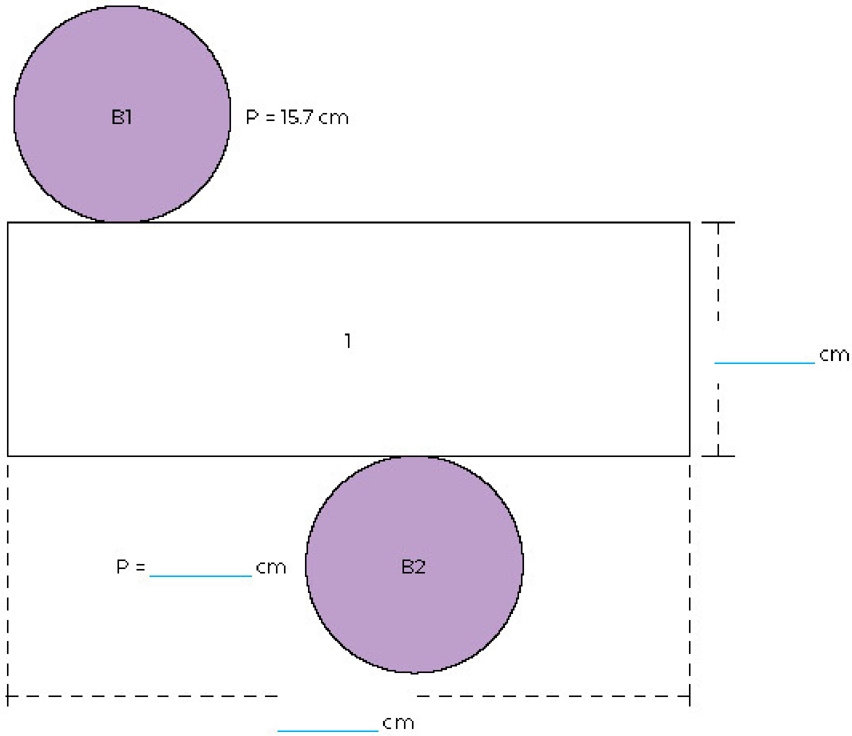
- ¿La altura puede variar aun cuando se hayan trazado las bases? ¿Por qué?

____

5. Observen y analicen las siguientes plantillas. Escriban las medidas que faltan. Contesten las preguntas en su cuaderno.



- ¿Cuánto deben de medir de ancho las caras rectangulares del 1 al 6? ¿Por qué?
- ¿Cuánto deben de medir de altura las caras rectangulares del 1 al 6? ¿Por qué?
- ¿En qué otros lugares pueden colocar las bases B1 y B2 del prisma?
- ¿Tienen que estar necesariamente en la ubicación que se muestra? ¿Por qué?



- ¿Cuánto debe medir de perímetro B2? ¿Por qué?
- ¿Cuánto deben de medir de largo el rectángulo 1? ¿Por qué?
- ¿Cuánto deben de medir de altura el rectángulo 1? ¿Por qué?
- ¿En qué otros lugares pueden colocar las bases B1 y B2 del cilindro?

> Comparen con las de otras parejas, sus respuestas.

Para finalizar

1. Trabajen en parejas para esponder las preguntas.

- ¿Cómo deben ser las bases opuestas en un prisma? _______________
- ¿Qué forma tienen las caras laterales en un prisma? _______________
- En un prisma, ¿las bases opuestas pueden tener diferente forma?, ¿por qué? _______________
- ¿Cómo deben ser las bases opuestas en un cilindro? _______________
- ¿Qué forma tiene en la plantilla la cara curva en un cilindro? _______________
- En un cilindro, ¿las bases opuestas pueden tener diferente tamaño?, ¿por qué? _______________
- Elaboren diferentes prismas y cilindros, y construyan algo con ellos.

> Comparen sus respuestas con las de otras parejas y muestren su arreglo de los cuerpos geométricos al grupo.

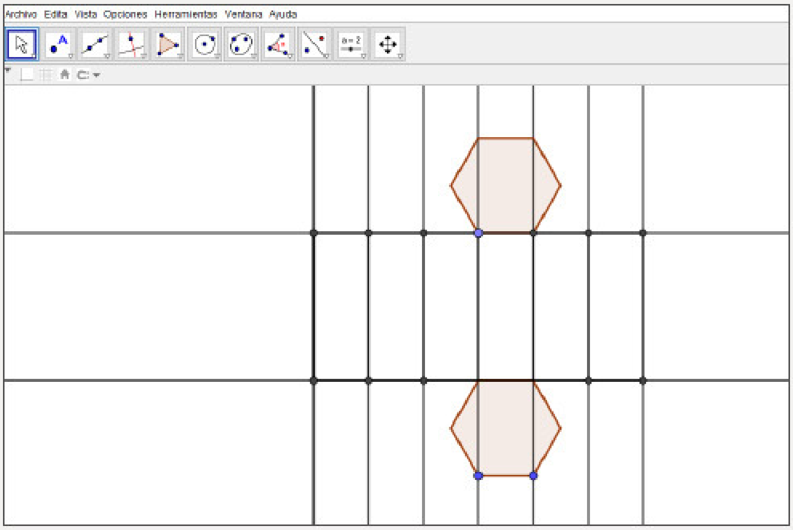
Trabaja con...

Trabajen en equipos.

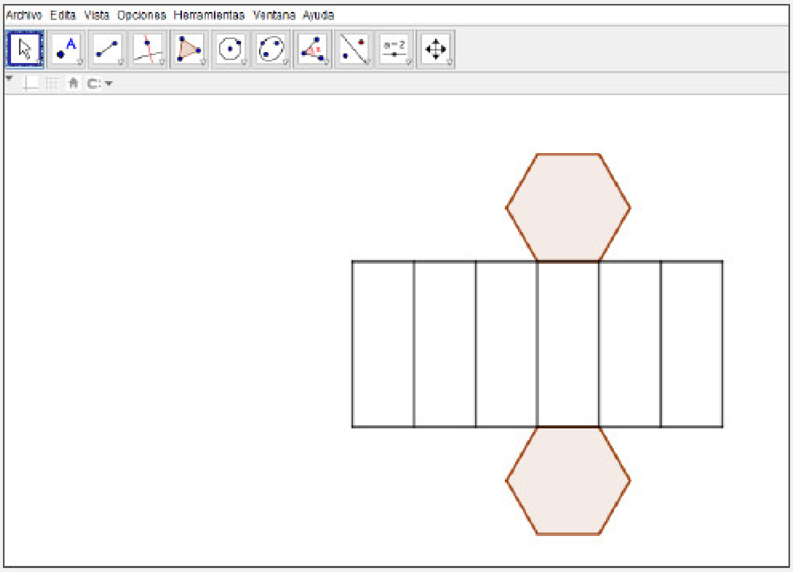
Utilicen GeoGebra para trazar alguna plantilla para la construcción de un prisma o de un cilindro.

Impriman su plantilla, recorten y armen el cuerpo geométrico.

Por ejemplo, la plantilla de un prisma hexagonal. Observen cómo se empieza a construir:



Y cómo se concluye:



Escriban en su cuaderno paso a paso la construcción de la plantilla y compartan sus observaciones y comentarios con las de otras parejas.

- En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.
- Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

Secuencia

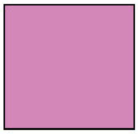
Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Magnitudes y medidas

26 Volumen de prismas, cilindros y otros cálculos

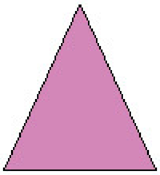
Una vez que ya sabes construir prismas y cilindros, ahora conocerás sobre el cálculo del volumen de prismas con base regular y del cilindro y el cálculo de alguna de sus dimensiones, dados algunos datos.

Recuperamos lo aprendido

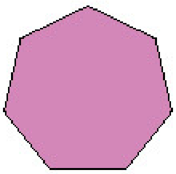
1. **En parejas, relacionen las columnas, escribiendo en los paréntesis las letras que correspondan.**



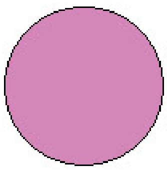
( ) ( )



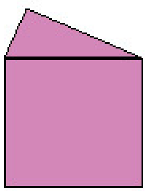
( )



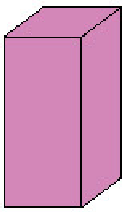
( ) ( )



( ) ( )



( )



( )

a. $A = \frac{b*h}{2}$

b. $A = L*L$

c. $V = 2 \times 2 \times 6$

d. $\pi * r * r = A$

e. $\frac{P*a}{2} = A$

f. $V = \frac{5 \times 3}{2} = \times 5$

g. $A = L^2$

h. $\frac{(7*L)*a}{2} = A$

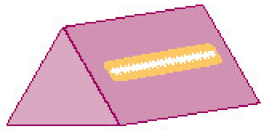
i. $\pi * r^2 = A$

› Comparen sus respuestas con las de otras parejas.

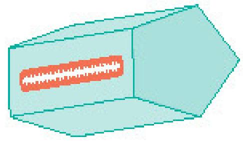
Construyo algo nuevo

1. **En equipos de tres integrantes resuelvan el siguiente problema.**

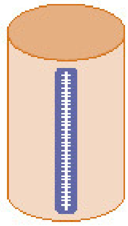
Reyna, Paco y Valentina, quieren que en sus lapiceras quepan al menos 10 lápices.



- Si un lápiz tiene 7 mm de diámetro y 19 cm de largo, ¿qué dimensiones pueden tener las lapiceras? ______



Consideran dejar espacio en las lapiceras para evitar que los lápices entren forzados, además quieren que puedan verse los extremos de los lápices y colores para poder elegir alguno.



- ¿Las respuestas serán iguales en todos los equipos en su grupo? ¿Por qué? ______
- ¿Qué dimensiones decidieron para la lapicera con forma de prisma triangular? ______
- ¿Qué dimensiones decidieron para la lapicera con forma de prisma pentagonal? ______
- ¿Qué dimensiones decidieron para la lapicera con forma de cilindro? ______
- ¿Cuánto tienen de volumen cada una de las lapiceras? ______

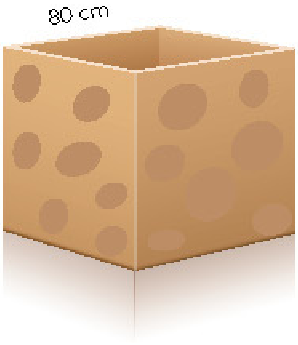
> Compartan con otros equipos sus resultados y estrategias. Escuchen con atención a sus compañeros y respeten las diferentes opiniones.

2. **Con el mismo equipo contesten las preguntas.**

- ¿Cuánto volumen ocupará un lápiz? ______
- ¿Cuánto volumen ocuparán 10 lápices? ______
- ¿Cómo irán acomodados los lápices? ______
- ¿Calcularán las dimensiones de la lapicera con los 10 lápices alineados? ¿Por qué? ______
- ¿Cómo calcularían el volumen de cualquier prisma recto? ______
- ¿El cilindro tendría las características de un prisma? ¿Cómo lo saben? ______
- ¿Cómo calcularían su volumen? ______
- ¿Cómo calcularían el área de la base de las lapiceras? ______
- ¿Cuánto propondrían que tenga de altura cada lapicera? ¿Por qué? ______
- Representen 3 diferentes posibilidades de volumen para que quepan los 10 lápices.

> Compartan con otras parejas sus estrategias y resultados.

3. Trabajen en equipos. Lean la situación y respondan.



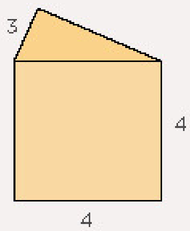
Belén guarda sus juguetes en una caja de forma cúbica que mide 80 cm por lado. Quiere otra caja con la misma capacidad, pero, con bases rectangulares.

- Estimen cuáles medidas del prisma rectangular pueden cumplir con las condiciones del problema. ____________________
- Calculen el volumen con las medidas estimadas y vean que tan cerca estuvieron. ____________________
- ¿Cuáles dimensiones proponen para la caja rectangular? ____________________
- ¿Las medidas que proponen son únicas? ____________________
- Comparen las medidas que proponen con las de otros equipos.
  - ¿En el grupo cuántas medidas diferentes resultaron? ____________________
  - ¿Cuántos procedimientos diferentes para el cálculo del volumen surgieron? ____________________
  - ¿Todas las propuestas cumplen con el objetivo de poder guardar juguetes? ¿Por qué? ____________________
- En una caja muy angosta y alta, ¿se podrán guardar juguetes?, ¿por qué? ____________________

> **Comenten grupalmente sobre la posibilidad de encontrar medidas que cumplan con el volumen, pero no con la solución del problema. Escuchen atentamente y con respeto a sus compañeros y compañeras. Encuentren diferentes soluciones al problema con las aportaciones.**

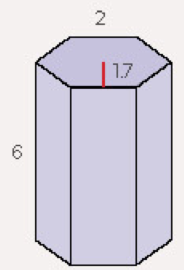
Hagamos una reflexión

Como ya saben, el volumen de un prisma se calcula multiplicando la superficie de la base por la altura del prisma.



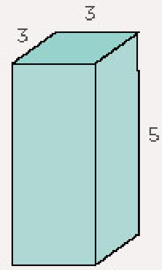
$V = \frac{(4 \times 3)}{2} \times 4$

$V = 24\ u^3$



$V = \frac{(2 \times 6 \times 1.7)}{2} \times 6$

$V = 61.2\ u^3$



$V = 3 \times 3 \times 5$

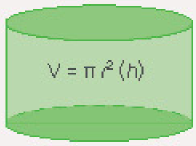
$V = 45\ u^3$

El cilindro se considera como un prisma circular, por lo que el cálculo de su volumen se efectúa de la misma forma que para cualquier prisma, esto es, su volumen será igual al producto del área de la base por la altura del cilindro.

En una lección anterior ya vieron que para calcular el área de un círculo se puede usar la fórmula:

$$Ac = \pi * r^2.$$

Entonces, usando la fórmula para el cálculo del volumen de prismas, se puede concluir que $V = \pi r^2 (h)$,



4. Trabajen en parejas y calculen lo que se indica.

a. Calculen la arista de un cubo.

Se quiere construir un cubo que tenga 216 cm^3 de volumen. ¿Cuánto debe medir una de sus aristas? Consideren que si la letra *a* representa una de sus aristas, el volumen será:

$$V = a * a * a = a^3 = 216 \text{ cm}^3$$

- Encierren el rango en el que debe estar la medida de la arista para que cumpla con el problema.

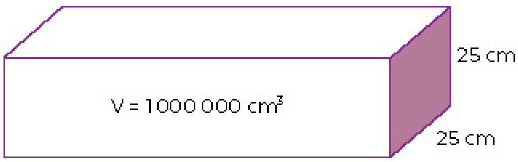
Entre 1 y 5 Entre 6 y 9 Entre 10 y 15 16 o más

- Calculen la medida y vean qué tan lejos o cerca estuvieron del rango estimado.
- Describan en su cuaderno la estrategia que utilizaron para calcular la medida.

b. Calculen la altura de un prisma.

Se necesita una pileta cuadrangular que tenga de anchura 25 cm y de profundidad 25 cm, pero capacidad de un metro cúbico (1 m^3 = 1 000 000 cm^3). ¿Qué tan larga debe ser la pileta? Consideren que si *h* representa lo largo de la pileta, su volumen será:

$$25 \times 25 \times h = 1\,000\,000$$



- Encierren el rango en el que debe estar la medida de *h* para que cumpla con el problema.

De 1 300 a 2 800 De 2 801 a 4 500 De 4 501 a 6 000 6 001 o más

- Calculen la medida y vean qué tan lejos o cerca estuvieron del rango estimado.
- Sustituyan en la fórmula el valor de *h* y comprueben si su resultado es correcto.
- Describan en su cuaderno la estrategia que utilizaron para calcular la medida.

› **Comparen sus respuestas y estrategias con las de otras parejas y observen que la solución se reduce a despejar la incógnita buscada y calcularla.**

Diccionario

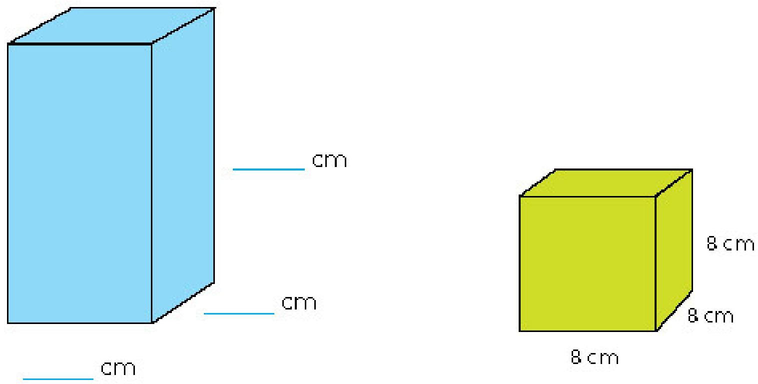
Poliedro
Cuerpo geométrico limitado por caras planas.

Para finalizar

1. **En parejas resuelvan lo siguiente.**

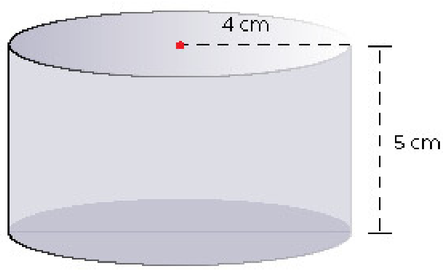
   a. El volumen en ambos **poliedros** son iguales.

   - ¿Cuánto mide el largo, el ancho y la altura del prisma rectangular? ______



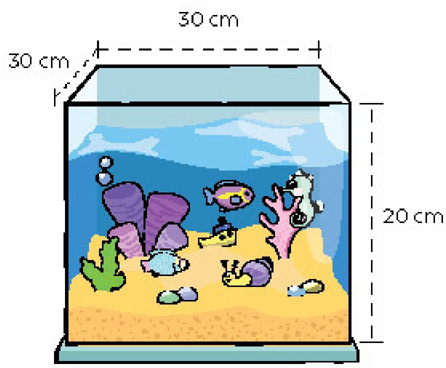
   b. 2 cm^3 del cilindro tiene una masa de 21 g.

   - ¿Cuánta masa tendrá el siguiente trozo? ______



   c. A una pecera se le agregan 9 000 cm^3 de agua.

   - ¿Hasta dónde llegará? ¿Cómo lo saben? ______



> Comparen sus respuestas y estrategias con las de otras parejas.

2. De manera individual, responde.

- ¿Cómo se calcula el volumen de cualquier prisma recto? ______________________
  ____
- ¿Cómo se calcula el volumen de un cilindro? ______________________
  ____
- ¿Cómo se calcula la altura de cualquier prisma recto si se conoce su volumen y el área de la base? ______________________
- ¿Cómo se calcula en cualquier prisma recto el área de la base si se conoce su volumen y la altura del prisma? ______________________
- ¿Cómo se calcula la altura de cualquier cilindro si se conoce su volumen y el área de la base? ______________________

> **Reúnete con un compañero y revisen sus respuestas. Recifiquen errores y comenten los cambios.**

Recursos de interés

Consulten la siguiente página de internet. En el apartado de ejercicios, resuelvan algunos relacionados con prismas o con cilindros.
https://bit.ly/2lxz0cm

Trabaja con...

Trabajen en equipos de tres.

Elaboren una hoja electrónica de cálculo, como la de la figura, para calcular volúmenes de prismas o cilindros o alguna de sus variables.

	A	B	C	D
1	Volumen de prismas rectos			
2	**Forma de la base**	**Area de la base**	**Altura del prisma**	**Volumen**
3				=B3*C3
4			=D4/B4	
5		=D5/C5		
6				
7	Volumen de cilindros rectos			
8	**Area de la base**	**Altura del cilindro**	**Volumen**	
9			=A9*B9	
10		=C10/A10		
11	=C11/B11			

En las celdas verdes se introducen los datos conocidos y en las azules deben escribir las fórmulas que calcularán automáticamente el dato solicitado.

Recuerden que las fórmulas deben iniciar con el signo = y que las operaciones están definidas de la siguiente manera:

- para la suma: +
- para la resta: -
- para la multiplicación: *
- para la división: /

Comenten en el equipo el porqué de cada fórmula escrita.

Comparen sus hojas de cálculo con las de otros equipos y, en caso necesario, corrijan o aumenten lo que les haga falta.

> En caso necesario pidan ayuda a otros estudiantes para resolver el ejercicio.

> Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

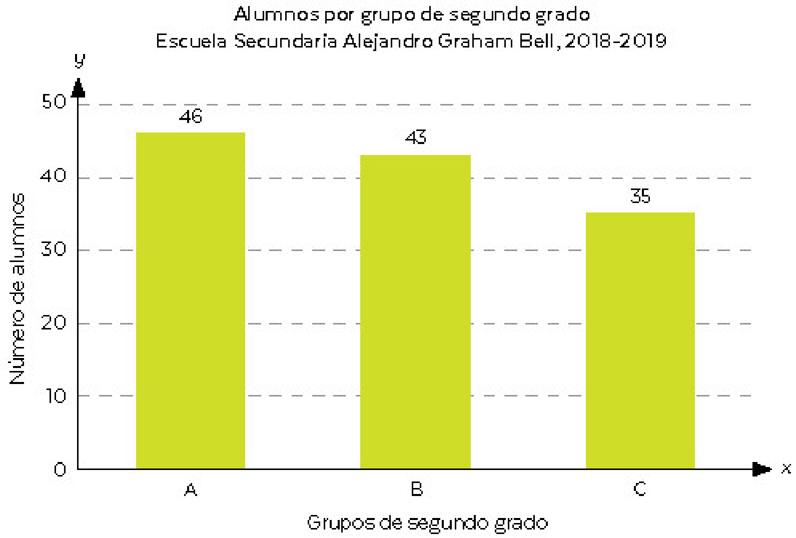
27 Lanzamiento de bala

En esta secuencia, con datos que se dan o con otros que investigues, elabora y lee tablas de frecuencias con datos agrupados, así como histogramas.

Recuperamos lo aprendido

1. **Realicen lo que se solicita en equipos de tres.**

- Analicen la gráfica.



- Describan la información de la gráfica. ______________________________

____

- Elaboren en su cuaderno la tabla de frecuencias que contenga los mismos datos.

> **Comparen su tabla con las de otros equipos.**

Construyo algo nuevo

1. **Trabajen en equipos.**

   a. En la clase de educación física, el profesor registró los lanzamientos de bala del grupo de segundo de la siguiente forma.

Prueba de lanzamiento de bala (cm). Escuela Secundaria Alejandro Graham Bell. Alumnos de 2.°
192, 177, 184, 191, 202, 172, 195, 188, 194, 190, 183, 186, 188, 185, 196, 174, 193, 176, 189, 201, 181,
190, 197, 178, 187, 194, 199, 204, 177, 188, 192, 193, 186,182, 199, 191, 187, 202, 198, 200, 194, 198

- ¿Cuáles datos se registraron dos o más veces? ______________
- Si construyen una tabla de frecuencias con los datos, ¿cuántos renglones tendrá esa tabla? ______________
- Si ubican los datos sobre el eje horizontal de una gráfica de barras, ¿cuántos datos distintos hay que colocar en ese eje? ______________
- ¿Cuáles serían las frecuencias de los datos? ______________
- Con base en la tabla y la gráfica anteriores, ¿cómo describen el conjunto de datos de lanzamiento de bala? ______________
____
- ¿Qué información se puede extraer de esa tabla y gráfica? Expliquen su respuesta. ______________
____

b. El profesor quiere agrupar los lanzamientos por **intervalos**:

- ¿Qué tanta variación hay en los lanzamientos? ______________
- ¿Cuál es el intervalo con los lanzamientos más lejanos y en cuál están los más cercanos? ______________
- ¿Cuál es el intervalo de lanzamientos que se ubican en el centro? ______________
- ¿En qué intervalo o intervalos se observaron más lanzamientos? ______________
- ¿Como se distribuyen los datos con respecto a los intervalos? ______________
____
- Dónde hay más datos: ¿entre las mayores distancias observadas o entre las menores del intervalo? ______________
- Para organizar el conjunto de datos sobre lanzamientos de bala, elaboren una tabla de frecuencias que permita responder las preguntas.

> **Comparen sus resultados y estrategias con los de otros equipos.**
> **¿Todos los resultados fueron iguales? ¿Por qué?**

Agrupación de datos en intervalos

Para la siguiente actividad, se recomienda:

- No utilizar muchos intervalos de datos; tampoco definir solo dos o tres; si los intervalos son pocos, corresponden muchos datos a cada intervalo; si los intervalos son numerosos, sus frecuencias son muy bajas.
- Utilizar números enteros, de preferencia, para formar los intervalos; se facilitan las operaciones.
- Una vez determinados los extremos de los intervalos de lanzamientos, contar los datos que caen dentro o sobre los extremos de cada intervalo; observen las operaciones realizadas en el problema a continuación.

Diccionario

Intervalo
Conjunto de todos los números comprendidos entre dos números *a* y *b*, donde $a < b$; *a* y *b* son los extremos, y pueden estar incluidos o no en el intervalo. En una recta numérica, un intervalo representa un segmento que puede contener o no sus extremos. Por ejemplo, el intervalo $25 \leq x < 30$ incluye todos los números ubicados entre los extremos, empezando desde el 25, hasta llegar al 30, pero sin incluir este último.

1. **En equipos, resuelvan la actividad.**

Adriana y Rafael son biólogos, recabaron los siguientes datos sobre el tamaño de venados que encontraron en un estado del norte del país para contribuir a la conservación de la especie:

Masas de los venados (kilogramos)

36.5, 156.9, 190, 158.7, 75.7, 100.3, 65.7, 151.4, 15.5, 63.8, 82.1, 47.9, 75.7, 93, 11.9, 54.7, 28.3, 57, 60.2, 41, 18.2, 100.3, 70.2, 52.9, 83, 68.4, 29.6, 144.1, 42.9, 69.9, 123.1, 92.1, 36, 119.5, 198.8, 21.9, 67.5, 203.4, 96.7, 27.4, 52, 13.2, 234.4, 63.8, 164.2, 93, 21, 39.2, 166.4, 107.6, 29.2, 34.7, 62.3, 92.1

Son 54 datos. Si Adriana y Rafael los colocan individualmente en una tabla, ésta sería muy larga. Así que para organizar sus datos en intervalos:

- Observaron que la masa más baja es de __________ kg y la más alta de __________ kg.
- Tomando números enteros, entre 10 y 240 kg quedarían incluidos todos los datos.
- Si se divide este rango en intervalos de 30 kg, se forman ocho intervalos de masa; la tabla con los intervalos para agrupar los datos es la siguiente:

Masas de los venados observados.
Estado del norte del país, 2018

Masa (kg)	Frecuencia
10-39.9	
40-69.9	
70-99.9	
100-129.9	
130-159.9	
160-189.9	
190-219.9	
220-249.9	
Total	54

- ¿Cada dato puede ubicarse en solo uno de los intervalos? Expliquen. ______________________________
- ¿Por qué consideran que Adriana y Rafael escriben sus intervalos con un número entero como extremo inferior, y como extremo superior un número decimal que termina en 9 décimas? Expliquen. ______________________________
- Identifiquen en qué intervalo se ubica cada uno de los siguientes datos: 67.5; 100.3; 190; 70.2 ______________________________
- Completen la tabla de frecuencias, ubicando cada dato en un intervalo de clase y sacando la frecuencia total de cada intervalo.

> **Comparen sus respuestas y estrategias con las de otros equipos.**

Recuerda que...

La **frecuencia** de un dato es el número de veces que ese dato se observa en una lista o conjunto de datos.

La **frecuencia relativa** de un dato, es la parte del total de datos que representa la frecuencia de ese dato específico; es decir, el número de veces que este aparece con respecto al total de datos. Se puede expresar como una fracción, como un numero decimal, o como un porcentaje. En casos de posible confusión, a la primera se le puede llamar frecuencia **absoluta**.

Tabla de frecuencias: es una tabla con dos o tres columnas para organizar y presentar los datos de un conjunto; en la columna izquierda se presentan los datos específicos o intervalos de datos, y del lado derecho se muestran las respectivas frecuencias, que pueden ser absolutas, relativas o ambas.

Hagamos una reflexión

En situaciones de datos cuantitativos numerosos, se agrupan los datos en intervalos:

- Lo primero es identificar los datos extremos del conjunto, es decir el menor y el mayor de ellos.
- Se eligen el extremo inferior del primer intervalo y el extremo o límite superior del último intervalo; por ejemplo, para las masas de los venados, los datos extremos son de 11.9 kg y 234.4 kg.
- Si hay pocos intervalos amplios, se acumulan demasiados datos en cada uno de ellos; si los intervalos son estrechos y numerosos, los datos quedan muy repartidos.
- Para conjuntos con relativamente pocos datos —menos de 100— un número adecuado de intervalos es de entre 5 y 10; en el caso de los venados, al partir de 10 kg y darles una amplitud de 30 kg, quedan ocho intervalos; como son 54 datos, serían en promedio casi 7 datos por intervalo.
- Los intervalos así establecidos se conocen como **intervalos de clase** o simplemente **clases**.
- Los límites de clase —inferior y superior— nos indican los datos menor y mayor que se incluyen en cada clase; se determinan de manera que cada dato se pueda ubicar con precisión solamente en una clase. Por ejemplo, el dato de 69.9 kg se ubica en la clase de 40 a 69.9 kg. mientras que el de 190 kg va en la clase de 190 a 219.9 kg; es decir, si un dato está en la frontera entre dos clases, se le ubica como límite inferior de la clase superior.
- Los resultados de un proceso para agrupar los datos de un conjunto no son únicos; puede haber algunas diferencias entre las propuestas de los equipos; son válidas siempre que se apliquen las recomendaciones que se han señalado.
- Para terminar una tabla de frecuencias, se cuentan los datos de cada clase.
- Elaboren un resumen en el equipo, sobre el procedimiento para elaborar una tabla de frecuencias, con la que se agrupen los datos de un conjunto en intervalos.

Elaboración de histogramas

1. **Trabajen en equipos y realicen lo que se solicita.**

A partir de la tabla de frecuencias con los datos de los venados observados, agrupados por intervalos, elaboren una gráfica que represente estos datos:

Masas de los venados observados. Estado del norte del país, 2018

Masa (kg)	10-39.9	40-69.9	70-99.9	100-129.9	130-159.9	160-189.9	190-219.9	220-249.9	Total
Frecuencia	14	15	10	5	4	2	3	1	54

- En el eje horizontal del plano cartesiano, coloquen los intervalos de clase; en el eje vertical las frecuencias.
- Sobre cada intervalo de clase, tracen una barra o rectángulo, cuya base sea igual a la amplitud del intervalo.
- Completen la gráfica con los títulos y demás información necesaria.

Hagamos una reflexión

Con base en una tabla de frecuencias, se procede a trazar la gráfica correspondiente:

- Sobre el eje horizontal coloquen los intervalos de clase; por ejemplo, para graficar las masas de los venados observados, primero se colocan las siguientes marcas sobre el eje horizontal:

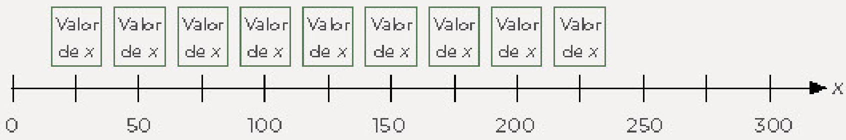


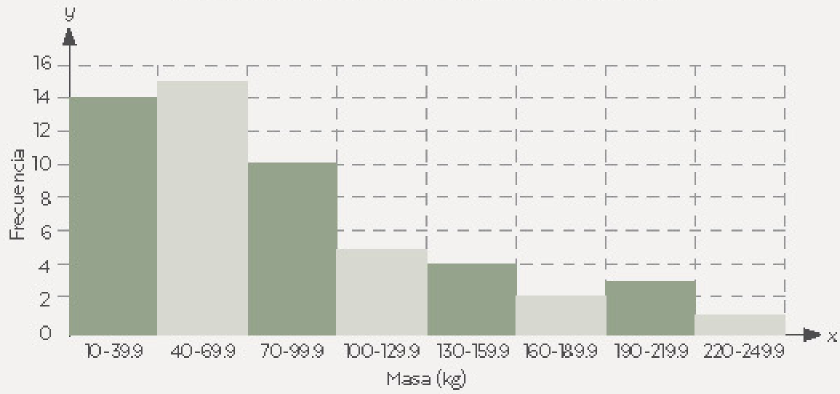
Figura YY. Marcas sobre eje horizontal, para definir intervalos de clase; datos de venados.

- En el eje vertical se marcan las frecuencias.
- Sobre cada intervalo tracen un rectángulo, cuya altura sea la frecuencia de ese intervalo de clase, y cuyos lados verticales correspondan a los límites ya marcados en el eje horizontal.

Una gráfica como la anterior se conoce como histograma. En estas gráficas:

- Los intervalos de clase deben ser de la misma amplitud.
- Los rectángulos, cuya altura es igual a la frecuencia de cada clase, van unidos unos a otros, sin espacios entre ellos.
- En un histograma se pueden representar tanto frecuencias absolutas como relativas.
- El histograma siguiente se obtiene con los datos de la anterior tabla de frecuencias.

Masa de venados observados. Estado del norte, 2018



2. Resuelvan en equipos

A partir de la tabla de frecuencias con los datos de los lanzamientos de bala, agrupados por intervalos, elaboren un histograma que represente estos datos:

Prueba de lanzamiento de bala (cm)
Escuela Alejandro Graham Bell. Alumnos de segundo grado, 2018

Masa (kg)	170-174	175-179	180-184	185-189	190-194	195-199	200-204
Frecuencia	2	4	4	9	11	7	5

- En el eje horizontal coloquen los intervalos de clase; en el eje vertical las frecuencias.
- Sobre cada intervalo de clase, tracen una barra o rectángulo, cuya base sea igual a la amplitud del intervalo.
- Completen la gráfica con los títulos y demás información necesaria.

Lectura de histogramas

1. **Trabajen en equipos; realicen lo siguiente.**

Elaboren una descripción del conjunto de datos de las masas de venados, con base en el histograma elaborado previamente; señalen todas las características importantes del conjunto de datos como se representa en el histograma.

> Compartan en el grupo sus descripciones y comenten con su profesor.

Hagamos una reflexión

Un histograma y su correspondiente tabla de frecuencias, nos sirven para describir un conjunto de datos y conocer algunas de sus características:

- ¿Qué tanta variación hay entre los datos recolectados? ¿En qué intervalo de clase están los datos menores y en cual están los mayores? ¿Hay datos dispersos, es decir alejados y aislados de los demás?
- ¿En qué clase o clases está el centro o parte media del conjunto de datos, con respecto a los extremos?
- ¿En cuál intervalo o intervalos se observaron más datos, cuál es el intervalo más frecuente? ¿Dónde se ubica?
- ¿Cómo se distribuyen los datos? ¿La distribución es simétrica o hay más datos de un lado del histograma que del otro? ¿Hay clases sin datos? ¿Se obtuvieron más datos por debajo de la clase más frecuente o por arriba de ésta?

Por ejemplo, con respecto a los datos de la masas de venados.

- No hay datos dispersos o aislados de los demás.
- Las mayores frecuencias, donde se observaron más venados, fue en los intervalos de menor masa: En los de 40-70 kg y de 10-40 kg.
- La distribución de los datos no es simétrica: más de la mitad son de menos de 100 kg, son escasos los venados de mayor tamaño.

2. **Resuelvan lo siguiente por equipos.**

Elaboren una descripción del conjunto de datos de lanzamientos de bala, a partir del histograma y de la tabla de frecuencias que han elaborado.

> Compartan sus descripciones en el grupo y con su profesor; complementen los hallazgos entre todos.

Hagamos una reflexión

Comenten en equipo.

- ¿Qué diferencias observan entre los histogramas y las gráficas de barras —como la del problema al inicio de la secuencia, sobre los grupos de la escuela— con respecto a la colocación de los datos en el eje horizontal?
- ¿A qué conjuntos de datos se pueden aplicar uno y otro tipo de gráficas?
- ¿Qué otras diferencias, así como similitudes, encuentran entre ambos tipos de gráficas?

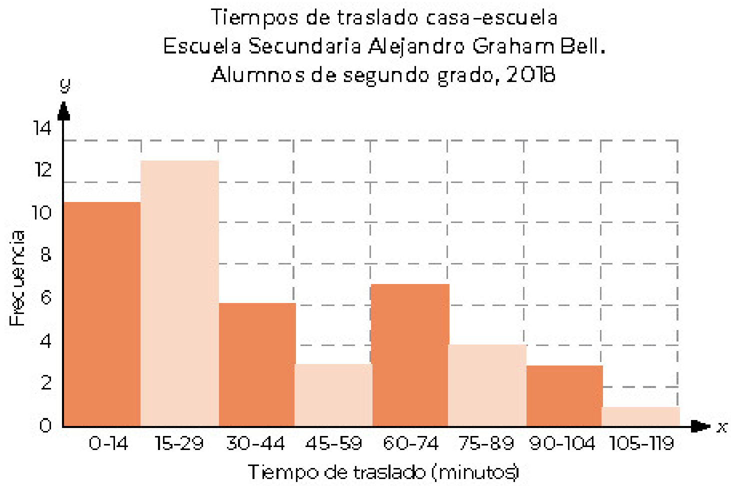
> Con apoyo de su profesor, comparen en el grupo sus conclusiones.

Para finalizar

1. **Resuelvan los siguientes problemas por equipos.**

   a. En la escuela "Alejandro Graham Bell" recogieron datos sobre el tiempo que les toma a los alumnos el trasladarse de su casa a la escuela.

   Se registraron los tiempos en minutos, se elaboró una tabla de frecuencias y se elaboró el siguiente histograma:



- ¿Qué tanta diversidad hay en los tiempos de traslado? ____________
- ¿En qué intervalo de clase están los menores y los mayores tiempos? ________
- ¿Hay algún tiempo que sea muy diferente de los demás? ____________
- ¿Cuál es la clase o clases que representa el centro o parte media de los tiempos? ____________________________
- ¿En qué intervalo se observa que llegan más alumnos a la escuela? __________
- ¿Es un solo intervalo o hay más de uno que sobresalga por su frecuencia? ____ ____________________________
- ¿Cómo se distribuyen los tiempos de traslado? ____________
- ¿Hay alguna clase en la cual no se hayan registrado datos? ____________

   b. En la tabla siguiente, se aprecia el consumo de agua de hogares de la colonia Los Olivos en un bimestre:

Consumo de agua en hogares. Colonia Los Olivos, 2018

Consumo de agua por bimestre (m^3)	5-14.99	15-24.99	25-34.99	35-44.99	45-54.99	55-64.99	65-74.99
Frecuencia	14	6	8	3	4	4	1

- ¿Cuál es la amplitud de los intervalos de clase? ___
- Elaboren en su cuaderno el histograma que corresponde a esta tabla de frecuencias.
- Describan los datos de consumo de agua en la colonia. ___

c. También se recogió el dato de la superficie de cada casa, expresado en metros cuadrados de construcción:

Superficie de las casas. Colonia Los Olivos (metros cuadrados)

67, 97, 105, 108, 93, 82, 78, 85, 95, 123, 142, 131, 99, 151, 160,172, 112, 126, 109, 176,
84, 144, 155, 163, 115, 118, 95, 98, 132, 145, 97, 80, 120, 130, 103, 140, 122, 144, 132, 108

- Propongan y justifiquen un número y amplitud de intervalos de clase adecuados para estos datos.
- Elaboren en su cuaderno la tabla de frecuencias y el histograma.
- Describan el conjunto de datos con base en la tabla y gráfica elaboradas. ___

d. Para el conjunto de datos de la primera situación de esta sección —tiempos de traslado casa-escuela— elaboren en su cuaderno la tabla de frecuencias con frecuencias relativas; luego construyan el histograma correspondiente, con frecuencias relativas.

- ¿Qué diferencias y similitudes encuentran entre los dos histogramas: con frecuencias absolutas y con frecuencias relativas? ___

e. Trabajen en su cuaderno. Observen la siguiente tabla:

Libros leídos por los alumnos
el ciclo escolar previo

Libros leídos	Frecuencia
0-2	17
3-5	10
6-8	0
9-11	2
12-14	1

- Construyan el histograma correspondiente y describan estos datos a otro equipo.

> **Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.**

Recursos de interés

En equipos, entren a la dirección electrónica que aparece enseguida, y practiquen sobre elaboración de histogramas.

https://bit.ly/2yV6ZVN

28 El uso de la computadora

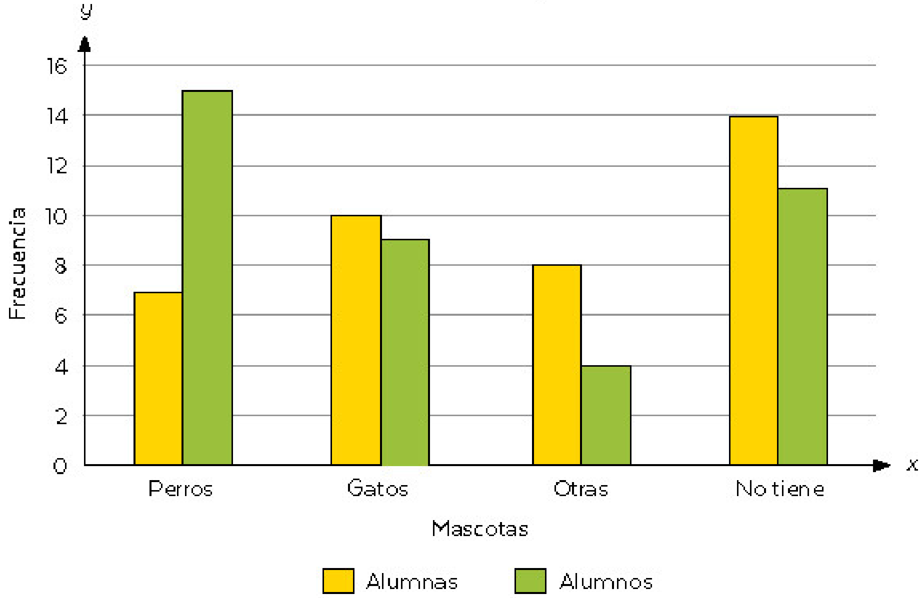
Después de haber trabajado con los histogramas, en esta secuencia aprenderás a elaborar y leer polígonos de frecuencia y gráficas de línea, a partir de tablas de frecuencias.

Recuperamos lo aprendido

1. **En equipos de tres, contesten las preguntas.**

En la siguiente gráfica se representan los datos en relación con las mascotas que tienen las alumnas y alumnos de tercer grado de la escuela Benito Juárez.

Mascotas de alumnas y alumnas de tercer grado
Escuela Benito Juárez, 2018-2019



- ¿Qué mascotas prefieren las alumnas? ____________________
- ¿Qué mascotas prefieren los alumnos? ____________________
- ¿Qué otras mascotas pueden preferir? ____________________
- ¿Cuáles podrían ser algunas razones para no tener mascotas? ____________________

____

- Recuerden que tener una mascota implica la responsabilidad de quererla y cuidarla mucho.

› Comenten con otros equipos sus respuestas.

Construyo algo nuevo

1. **Resuelvan por equipos.**

Se ha elaborado una encuesta sobre el tiempo que durante el día los alumnos y alumnas que tienen computadora la utilizan.

Tiempo de uso de la computadora por día
Escuela Benito Juárez. Alumnos y alumnas de segundo grado

Tiempo (horas)	0-1.9	2-3.9	4-5.9	6-7.9	8-9.9	10-11.9
Frecuencia alumnos	9	10	16	6	3	2
Frecuencia alumnas	13	13	7	4	5	4

- En su cuaderno, representen gráficamente los datos de los alumnos y de las alumnas.
- Describan los conjuntos de datos de tiempo de alumnos y alumnas por separado.

____

____

- Decidan quién usa más la computadora: las alumnas o los alumnos. _______________

____

- ¿Pueden incluir los dos conjuntos de datos en una sola gráfica? ¿Por qué? _______________

____

____

> Comenten entre equipos sus respuestas y estrategias.

Hagamos una reflexión

En un diagrama de barras, como en la actividad al inicio de la lección, pueden visualizarse los datos de dos o más conjuntos de datos; en un histograma, ¿se pueden representar dos conjuntos de datos agrupados en intervalos de clase?

¿Cómo se representan números sobre el eje horizontal de un histograma?

Una forma sencilla para incluir datos de dos conjuntos en una sola gráfica, consiste en marcar con un punto la frecuencia de los alumnos —a la mitad de la amplitud de cada intervalo— y con otro punto la frecuencia de las alumnas; a continuación unir los puntos que corresponden a los alumnos con segmentos, y lo mismo con los puntos de las alumnas.

2. **Resuelvan por equipos.**

El turismo es una de las actividades económicas más importantes de México, y durante 2017 recibimos a más de 39 millones de visitantes extranjeros.

La tabla siguiente muestra el número de extranjeros que llegaron a nuestro país cada mes del año 2017.

Turistas internacionales recibidos en México
por mes, 2017

Mes	Número de turistas (miles de personas)
Enero	2 992
Febrero	2 936
Marzo	3 498
Abril	3 235
Mayo	3 084
Junio	3 474
Julio	3 718
Agosto	3 021
Septiembre	2 675
Octubre	3 010
Noviembre	3 428
Diciembre	4 224

Fuente: https://bit.ly/2tH6GJf

- En su cuaderno hagan una gráfica en la cual se unan con segmentos las diferentes frecuencias de cada mes, es decir, los turistas que visitaron México durante 2017.
- ¿En cuál eje anotaron los meses del año? ______
- ¿En cuál eje anotaron el número de turistas? ______
- ¿Cuáles son las variaciones en el número de turistas en los diferentes meses del año? ______

> **Comparen sus respuestas y estrategias con las de otros equipos.**

3. **Trabajen por parejas y completen lo que haga falta.**

Las situaciones anteriores —sobre el uso de la computadora y sobre el turismo— conducen a la elaboración de dos nuevos tipos de gráficas.

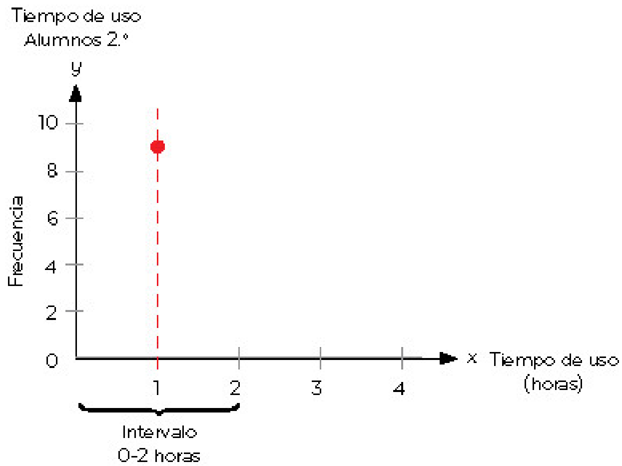
Para graficar los datos de tiempo de uso de computadoras, si se toman los intervalos de clase y las frecuencias de los alumnos, resulta la siguiente tabla de frecuencias:

Tiempo de uso de la computadora por día
Alumnos de 2.° - Escuela Benito Juárez

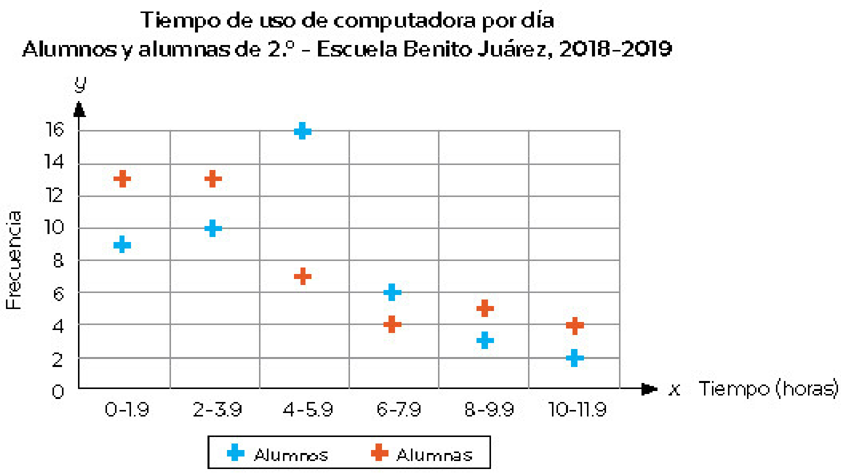
Tiempo (horas)	Frecuencia alumnos
0-1.9	9
2-3.9	10
4-5.9	16
6-7.9	6
8-9.9	3
10-11.9	2

A partir de esta tabla, al igual que para elaborar un histograma:

- primero se colocan sobre el eje horizontal ______________________________
- sobre el eje vertical se miden las frecuencias; pero solamente colocamos un punto con la misma altura, a la mitad de la amplitud del intervalo; para los datos de tiempos de los alumnos, la amplitud de los intervalos es de ________ horas; y la frecuencia de la primera clase es de ________; así, la ubicación del punto que corresponde al intervalo de 0 a 2 horas de uso entre los alumnos, es como se muestra a continuación:

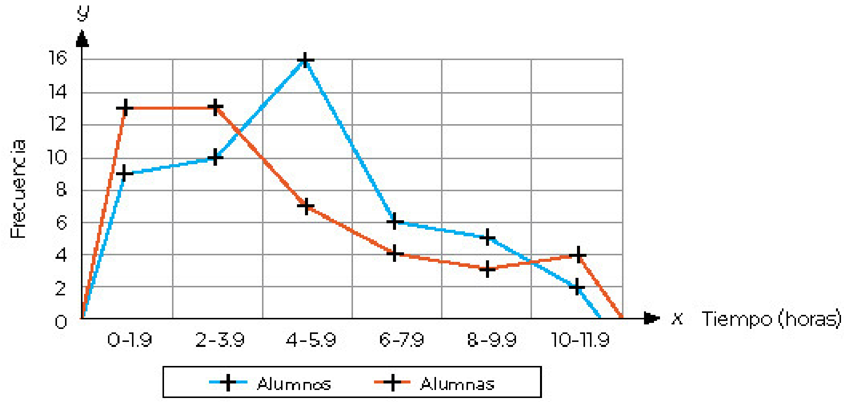


- de la misma manera, se terminan de localizar los puntos que representen la altura de las frecuencias de cada clase, siempre a la mitad de la amplitud de los intervalos de clase;
- se ubican también los puntos correspondientes a los tiempos de las alumnas, sobre el mismo plano cartesiano, usando los mismos intervalos de clase que para los alumnos; de este modo, habrá dos puntos en cada intervalo de clase, uno para la frecuencia de ________, y otro para la frecuencia de ________, como se ve en la figura siguiente.



- para concluir esta gráfica, se unen con segmentos los puntos que representan las frecuencias de los alumnos, y con otros segmentos los puntos que corresponden a las alumnas:

Tiempo de uso de computadora por día
Alumnos y alumnas de 2.º - Escuela Benito Juárez, 2018-2019



Este tipo de gráficas se conoce como **polígono de frecuencias**. También se pueden utilizar con frecuencias absolutas o relativas. La gráfica se cierra trazando un segmento del punto del primer intervalo al punto medio de lo que sería el intervalo anterior, sobre el eje horizontal, y otro que una la frecuencia del último intervalo con el punto central del intervalo siguiente.

Hagamos una reflexión

Para elaborar un **polígono de frecuencias**, es necesario:

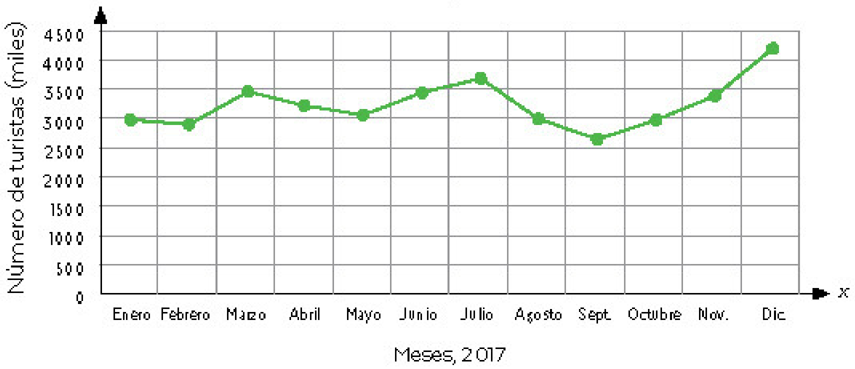
- sobre el eje horizontal ubicar los intervalos de clase;
- sobre el eje vertical se miden las frecuencias; sobre una recta vertical que parte del punto medio de cada intervalo, se marcan tantos puntos como conjuntos de datos se vayan a incluir en el mismo plano cartesiano;
- se unen con segmentos los puntos que representan las frecuencias de cada conjunto de datos.

La mayor utilidad de un polígono de frecuencias es cuando se tienen que comparar dos o más conjuntos de datos. Por ejemplo, para los tiempos de los alumnos:

- los tiempos de uso de computadora más bajos están entre 0 y dos horas; los tiempos más elevados son de entre ______ y ______ horas; no hay datos dispersos;
- los tiempos que están en la parte media, abarcan las dos clase que van de 4 a 6 horas y de __________ a __________ horas;
- el intervalo que se observó con mayor frecuencia entre los alumnos, es el de 4 a 6 horas.
- ¿Cuántos alumnos usaron la computadora menos de 4 horas?
- ¿Cuántos entre 8 y 12 horas al día?
- ¿Cuántas alumnas usaron la computadora menos de 4 horas?
- ¿Cuántas entre 8 y 12 horas al día?
- Comparen las descripciones de los tiempos de alumnos y alumnas, a partir de su gráfica:
  - ¿En qué casos consideran que es conveniente utilizar frecuencias relativas en un polígono de frecuencias?

> **Comparen sus respuestas con las de otros equipos.**

La situación que se presenta en la visita de turistas a México lleva a elaborar lo que se conoce como una **gráfica de línea**:



Hagamos una reflexión

Para elaborar una **gráfica de línea**:

- sobre el eje horizontal se representan intervalos iguales de tiempo: pueden ser horas, días, meses, años u otras unidades;
- sobre el eje vertical se miden los valores de la otra cantidad que varía; se representan con un punto que se ubica a la mitad del intervalo de clase;
- se unen los puntos con segmentos.

Los valores en el eje vertical pueden ser también porcentajes; asimismo, en una gráfica de línea pueden incluirse dos o más conjuntos de datos.

Este tipo de grafica es útil para identificar los cambios y la evolución que experimenta un conjunto de cantidades a medida que transcurre el tiempo: si crece o decrece, cuando es más baja o más alta. Por ejemplo, el número de turistas que llegó a México por mes durante 2017.

- ¿En qué mes hubo más turistas?
- ¿En cuál menos?
- ¿Cuál es la diferencia del número de turistas entre la mayor y la menor entrada?
- ¿En cuáles meses están los picos más altos?
- ¿En cuáles los mínimos?
- ¿En cuáles periodos crece el número de turistas que recibimos?
- ¿En cuáles periodos disminuye el flujo de visitantes?

› Comparen sus respuestas y estrategias con los de otros equipos.

4. Comparen las características de un polígono de frecuencias con las de una gráfica de línea. Expliquen sus respuestas.

- ¿Qué tipos de datos se colocan en el eje horizontal en un polígono de frecuencias y en una gráfica de línea? ______________________________

____

- ¿Y los datos en sus ejes verticales? ¿Son frecuencias en ambos casos? ____________
- ¿A qué conjuntos de datos se pueden aplicar uno y otro tipo de gráficas? ____________
- Las gráficas de línea tienen determinada utilidad, nos proporcionan cierta información sobre el conjunto de datos que representan. ¿Cuál es ésta y en qué se distingue de un polígono de frecuencias? ____________
- ¿Qué otras diferencias, así como similitudes, encuentran entre ambos tipos de gráficas? ____________

> Compartan en el grupo estas observaciones y comenten con su profesor.

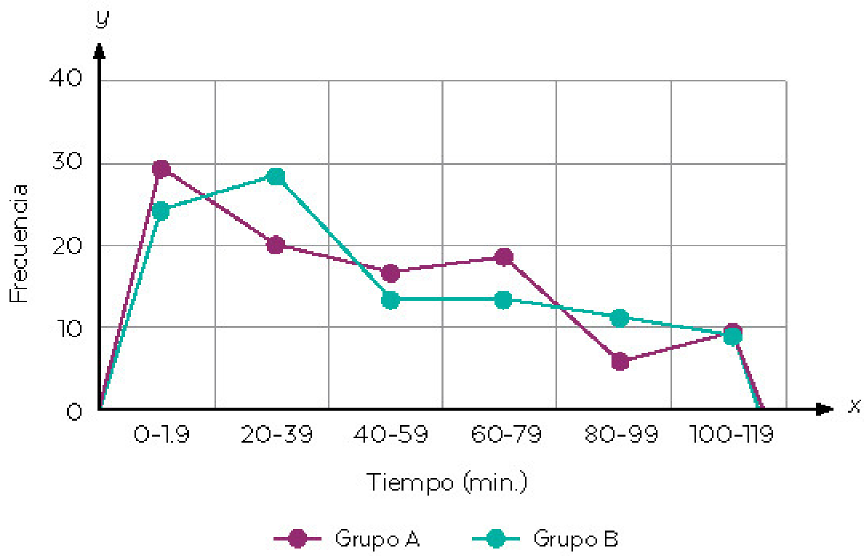
Para finalizar

1. **Resuelvan en su cuaderno, por equipos.**

   a. Las gráficas siguientes muestran los tiempos de traslado de los alumnos de dos grupos de la escuela Benito Juárez.

   - Describan los tiempos de traslado de cada grupo y compárenlos entre sí.

Tiempo de traslado casa-escuela
2.° A y B - Escuela Benito Juárez, 2018-2019



   b. La siguiente tabla muestra el consumo de agua en igual número de casas de dos colonias durante un bimestre.

Consumo de agua en hogares de dos colonias 2018

Consumo de agua por bimestre (m^3)	5-14.99	15-24.99	25-34.99	35-44.99	45-54.99	55-64.99	65-74.99
Frecuencia colonia Los Olivos	15	7	9	4	5	5	2
Frecuencia colonia Del Mar	10	10	9	6	5	4	3

- Elaboren polígonos de frecuencias, describan y comparen los consumos de agua en las dos colonias.

c. Los siguientes son los datos de la población total de México registrada en los censos de 1950 a 2010.

- Representen estos datos en una gráfica.
- Seleccionen y justifiquen el tipo de gráfica adecuado para aplicarse a estos datos.
- Describan la evolución de la población del país durante estos años.

Población de México 1950-2010

Año	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Población (miles de habitantes)	25 791	34 923	48 225	66 847	81 250	97 483	112 337

Fuente: INEGI; https://bit.ly/2p6e7bz.

d. La siguiente tabla muestra el registro de lectura en 2017 de alumnos de segundo.

Libros leídos por los alumnos el ciclo escolar previo
Escuela Lerdo de Tejada. Segundo grado, 2018-2019

Libros leídos	0-2	3-5	6-8	9-11	12-14
Frecuencia Grupo A	19	10	5	4	2
Frecuencia Grupo B	16	9	8	6	0

- Construyan los polígonos de frecuencias correspondientes y describan estos datos a otro equipo.

Trabaja con...

Realicen la siguiente actividad en equipos.

Entren al menú *Datos* del sitio de internet del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) (https://bit.ly/2nGtJkg), y seleccionen un tema:

- identifiquen al menos una gráfica de cada uno de los siguientes tipos: de barras, circular, histograma, polígono de frecuencias, grafica de línea;
- en el menú de *Tabulados* identifiquen o formen un conjunto de datos que se pueda representar con alguno de los tipos de grafica anteriores.

Temas recomendables para esta investigación: Hogares y vivienda; Población; Tecnologías de la información y la comunicación (TIC en hogares); Medio ambiente; Educación; Transporte.

- Compartan con otros equipos su investigación y justifiquen su elección.
- Escriban en su cuaderno lo que les haya parecido más interesante de la lección y lo que se les hizo difícil.

Secuencia

Eje: Análisis de datos
Tema: Estadística

29 Descripción de conjuntos de datos

En primer grado estudiaste las medidas de tendencia central y el rango de conjuntos de datos. Ahora estas herramientas se complementan con una nueva medida de dispersión, la desviación media, para mejorar la descripción de conjuntos de datos.

Recuperamos lo aprendido

1. **Lean lo siguiente y contesten.**

Los siguientes son los números de alumnos en cada uno de los grupos de la escuela: 40, 42, 44, 33, 34, 36, 43, 44.

- ¿Cuál es la media de alumnos por grupo en la escuela? ______
- Obtengan las medidas de tendencia central de estos números de alumnos. ______
- ¿Cuál es la diferencia entre el mayor número de alumnos en un grupo y el que tiene la menor matrícula? ______

> **Comparen sus procedimientos y comenten en el grupo y con su profesor.**

Construyo algo nuevo

Medidas de tendencia central para describir conjuntos de datos

1. **Resuelvan lo siguiente por parejas.**

El profesor de Educación Física está formando los equipos de basquetbol de la escuela. Para seleccionar a sus jugadores, recogió datos sobre los estudiantes que son candidatos. Los saltos de altura en uno de los grupos de segundo son los siguientes (en centímetros); el profesor también registró si el alumno participa o no en otro equipo deportivo:

87,	91,	69,	72,	95,	88,	94,	90,	83,	86,	88,	86,	96,	74,	93,	71
sí	no	no	sí	no	no	sí	sí	sí	no	sí	sí	no	sí	sí	sí

- ¿De qué tipo son los datos en uno y otro conjunto? Expliquen. ______
- Encuentren las medidas de tendencia central de los saltos de estos alumnos, así como de su participación en otros deportes. ______

Recuerda que...

Las medidas de tendencia central y de dispersión en conjuntos de datos son:

Media aritmética. Se obtiene dividiendo la suma de los datos entre el número total de datos del conjunto

Mediana. Todos los datos deben ordenarse de menor a mayor. La mediana es el dato ubicado a la mitad de la lista; si el número de datos es par, la mediana es la media aritmética de los dos datos que están en medio de la lista.

Moda. Es el dato que se observa con mayor frecuencia en el conjunto.

Cualquiera de estas las medidas puede representar con un solo valor a todo el conjunto de datos. Indican dónde se concentran los datos o dónde se podría ubicar el centro del conjunto. Por ello, se les conoce como medidas de tendencia central.

- ¿La media de los saltos de los alumnos puede ser mayor de 96 cm? ¿La mediana puede estar por debajo de 69 cm? Expliquen sus respuestas. ____________________

____

- Si el docente necesita comparar este grupo con otros de la escuela, ¿cuál de estas medidas consideran que representa mejor a todos los datos del grupo? Expliquen su respuesta. ____________________

Hagamos una reflexión

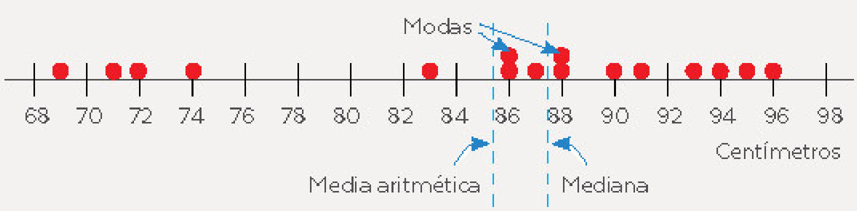
Entre las principales propiedades de la media aritmética, la mediana y la moda están las siguientes:

- la media y la mediana siempre están entre el menor y el mayor de los datos; la moda puede estar en alguno de los extremos de los datos;
- la media aritmética, la mediana y la moda pueden ser diferentes entre sí; la media y la mediana no tienen que ser iguales a alguno de los datos; para datos cualitativos, sólo es posible obtener la moda;
- los datos muy diferentes de los demás, hacia un extremo u otro, alteran el valor de la media aritmética, y la mediana es más adecuada para indicar el centro o la zona de mayor concentración de datos.

Por ejemplo, sobre los datos de los alumnos que son candidatos para un equipo de basquetbol se puede observar lo siguiente:

- la media aritmética y la mediana de los saltos son respectivamente 85.2 cm y 87.5 cm; hay dos modas, pues dos de los datos se repiten: 86 y 88 cm.
- sobre la participación en otros deportes, solamente se puede calcular la moda (porque no es posible ordenar de menor a mayor los textos —sí, no— para calcular la mediana; tampoco se pueden sumar textos para calcular la media aritmética); la moda es "sí", que fue la respuesta de la mayoría (10) de este conjunto de alumnos;
- la media del conjunto de datos no puede ser mayor de 96 cm, pues éste es el mayor de los datos; tampoco la mediana puede ser menor de 69 cm;
- para seleccionar la medida de tendencia central más adecuada para representar al conjunto de datos de saltos, es útil representarlos sobre una recta numérica como se muestra a continuación:

Saltos de altura. Alumnos de 2.°



Se observa que la mayoría son de 83 centímetros y más: entre los 83 y 96 centímetros están la mayor parte de ellos; sin embargo, hay cuatro saltos bastante inferiores, que influyen para que la media aritmética disminuya; de esta manera, la mediana es una mejor aproximación al centro y la concentración de este conjunto de datos.

Recuerda que...

Rango. Diferencia entre el mayor y el menor de los datos; es una medida de qué tan separados o dispersos entre sí están los datos de un conjunto.

Datos cualitativos. Se trata de clases o categorías expresadas con palabras o imágenes: nacionalidad, sexo, lugar de nacimiento o de residencia, marca o nombre de un producto; o una característica, como haber leído o no un libro, haber visto o no una película determinada.

Datos cuantitativos. Se expresan con números; pueden generarse por procesos de contar; por ejemplo: número de personas, de horas o días, o número de edificios; también pueden ser producto de mediciones, como el peso de personas o cosas, distancias o precios de diferentes artículos.

2. **Resuelvan en equipo el siguiente problema.**

El equipo de futbol de la escuela tuvo los siguientes marcadores en sus partidos de la última temporada (goles anotados-goles recibidos):

2-0	2-0	1-2	7-0	1-0	8-5	1-0	1-0	0-4	0-3
1-2	0-0	3-3	0-2	2-4	0-3	0-3	1-1	1-2	2-1

- Obtengan las medidas de tendencia central de los goles anotados por el equipo, así como para los goles recibidos.
- En ambos casos, señalen cuál de las medidas de tendencia central es la más conveniente para representar al conjunto de datos; si es necesario, recurran a representarlos sobre rectas numéricas.

> **Presenten al grupo los argumentos en que basaron sus procedimientos y resultados.**

Medidas de dispersión entre datos

1. **En parejas, lean la situación y resuelvan.**

Andrea y Araceli tienen un puesto en una plaza comercial donde venden postres. Sus ventas de la semana pasada fueron las siguientes: lunes: $2 140; martes: $2 250; miércoles: $ 2 390; jueves: $2 740; viernes: $2 910; sábado: $2 870; domingo: $3 110.

- ¿Cuál fue la media de las ventas durante esa semana? Obtengan todas las medidas de tendencia central de estos datos. Compárenlas e indiquen cuál de ellas es la más adecuada para representar los datos de ventas. Expliquen su respuesta.

Las amigas quieren saber qué tan diferentes son las ventas dentro de la semana, o qué tanta variación hay entre unos días y otros. Empiezan por calcular la diferencia entre la mayor y la menor de sus ventas diarias.

- ¿Cuál es esta diferencia? ______

Sin embargo, no están satisfechas. El rango solo les dice cuáles son las ventas en sus extremos, pero no les dice lo que sucede los demás días.

- ¿Que otro cálculo pueden hacer Araceli y Andrea? ______

Araceli piensa que ya tienen la venta media de la semana —la media aritmética— y que pueden medir qué tanto se aparta la venta de cada día de esa venta media. Pero Andrea señala que si calculan las diferencias de las ventas de cada día respecto a la media, unas saldrán positivas y otras negativas, se compensan unas con otras.

- ¿Cómo pueden medir solo la distancia que la venta de un día se aparta de la venta media? Y si estas separaciones son diferentes para cada día, ¿cómo tomarlas en cuenta en conjunto? ______
- Propongan otra forma de medir la separación entre los datos de Andrea y Araceli —diferente del rango— que tome en cuenta todos los datos disponibles. ______

> **Comparen y comenten los procedimientos que encuentre y proponga cada equipo.**

Recuerda que...

La **media aritmética** tiene varias **interpretaciones**, que se estudiaron en primer grado de educación secundaria. Una de ellas consiste en que la media es un buen representante de un conjunto de datos cuando se hace necesario reducir su multiplicidad y operar con un representante de todos ellos.

Hagamos una reflexión

El rango nos proporciona una medida de la separación o espacio entre los datos de un conjunto determinado. Pero solo nos indica la amplitud del intervalo donde se ubican los datos y no permite conocer qué tan juntos o separados están dentro de ese intervalo.

Para tener en cuenta todos los datos de un conjunto, y obtener otra medida de su distribución o de la separación que hay entre ellos, se toma como referencia la media aritmética. Por ejemplo, para los datos de ventas del puesto de postres, la media aritmética de las ventas de la semana es de $2 630. Las diferencias con respecto a la media aritmética se pueden organizar en una tabla como la siguiente:

Ventas ($) y diferencia con respecto a su media

Ventas ($)	2140	2250	2390	2740	2910	2870	3110
Diferencia respecto a la media aritmética	−490						

- Completen la tabla y obtengan el total de las diferencias. ¿Consideran que este resultado proporciona información sobre qué tan dispersos están los datos del conjunto? Expliquen.

Para medir la distancia entre dos números o puntos sobre una recta numérica, se utiliza el valor absoluto de su diferencia (consultar el Diccionario a la derecha). Las distancias o valores absolutos de las ventas diarias con respecto a su media aritmética, se pueden organizar en una tabla como la siguiente:

Ventas ($) y distancia con respecto a su media

Ventas ($)	2140	2250	2390	2740	2910	2870	3110
Distancia respecto a la media aritmética	490						

- Completen la tabla anterior. Ahora tenemos un nuevo conjunto de datos, formado por las distancias con respecto a la media.

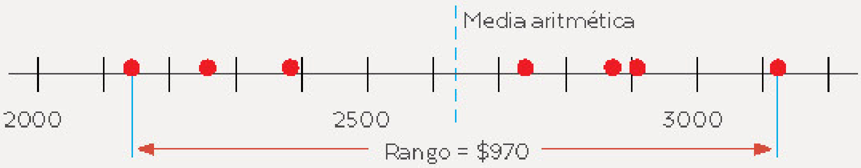
¿Cómo podemos reducir la cantidad de datos de distancia y tener un solo número que represente a todas las distancias diferentes? Se recurre a la media aritmética, que puede ser utilizada como representante de múltiples datos (Consultar Recuerda que...).

- Ahora obtengan la media aritmética de las distancias calculadas en la tabla anterior.

Este último resultado se llama desviación media. Junto con el rango se conocen como medidas de dispersión de un conjunto de datos.

La media aritmética de las ventas diaria de los postres es de $317, el valor de la desviación media. Una comparación con el rango puede apreciarse al graficar los datos de ventas y la media aritmética sobre una recta numérica:

Ventas diarias de postres



- Elaboren en el equipo, un resumen de los pasos a seguir para calcular la desviación media de un conjunto de datos. Comparen con el procedimiento para calcular el rango.

> Compartan y comenten en el grupo sus observaciones sobre este apartado y sobre medidas de dispersión de un conjunto de datos.

2. **Resuelvan en equipo y respondan a lo que se solicita.**

Retomen el segundo problema del apartado anterior y obtengan las medidas de dispersión para los conjuntos de datos de goles anotados y goles recibidos por el equipo de futbol de la escuela.

- ¿Cuál de las dos medidas de dispersión consideran que proporciona una mayor precisión de la dispersión o separación de los datos? Expliquen. ______________
- ¿Cuál de las dos medidas es más sencilla de calcular y cuál requiere más operaciones para obtenerla? ______________
- ¿Qué ventajas y desventajas tienen estas dos medidas de dispersión? ______________

> Comenten entre equipos y con su profesor, sus observaciones sobre esta sección.

Para finalizar

1. Resuelvan lo siguiente en relación con el problema inicial de esta secuencia.

- Para los datos de matrícula de los grupos escolares obtengan adicionalmente la desviación media. ______________
- Comparen las medidas de tendencia central y propongan cuál de ellas es la más adecuada para representar los datos de la escuela. ______________
- Comparen las dos medidas de dispersión. ¿Qué indica cada una? ______________

2. Formen equipos y resuelvan en su cuaderno los siguientes problemas.

a. Ester vende tamales de cuatro clases: dulces (D), chiapanecos (C), de rajas (R) y verdes (V). En la lista siguiente anotó sus ventas de las primeras tres horas del día:

D, C, R, C, D, R, R, D, D, V, C, C, D, D, V, R, D, C, C, C, C, R

- Obtengan todas las medidas de tendencia central y de dispersión que sea posible calcular sobre este conjunto de datos. Expliquen sus respuestas.

b. Los salarios mensuales del personal de una empresa son los siguientes:

4 200 3 640 3 975 3 750 4 120 9 540 14 732 4 058 3 890 3 695 4 310

- Grafiquen los datos sobre una recta numérica.
- Calculen las medidas de tendencia central y de dispersión; compárenlas y determinen las más adecuada para estos datos.

c. Leonardo diseñó su página web personal. Al poco tiempo había recibido los visitantes con las siguientes edades:

23, 45, 56, 18, 42, 71, 34, 38, 25, 29, 33, 21, 37,
46, 35, 24, 35, 22, 27, 25, 62, 25, 26, 30, 29

- Obtengan el rango y la desviación media de las edades de los que visitan el sitio de Leonardo.
- Comparen las medidas, utilicen también una recta numérica.

d. Construyan un conjunto de datos que tenga las siguientes características: el número de datos es de 12; el dato mayor es 65; la mediana es 45, el rango es de 40.

- Elaboren una lista de los datos de su conjunto y ubíquenlos sobre una recta numérica. Calculen todas sus medidas de tenencia central y de dispersión.
- Comparen los conjuntos de datos generados por cada equipo.
- ¿Qué diferencias hay entre los conjuntos de datos y las medidas con que se describen?
- Traten de relacionar las diferencias en las medidas de tendencia central y de dispersión, a partir de cómo están distribuidos los datos en cada conjunto.

> Comenten entre equipos y con su profesor.

Trabaja con...

Trabajen por parejas.

Utilicen una hoja de cálculo como la siguiente para resolver uno de los problemas de esta secuencia. El ejemplo corresponde al problema 2c anterior:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2						Edades de visitantes			
3		Media aritmética				23			
4		Mediana				45			
5		Moda				56			
6		Rango				18			
7		Desviación media				42			
8						71			
9						34			
10						38			
11						25			
12						29			
13						33			
14						21			
15						37			
16						46			
17						35			
18						24			

- en la columna B, introduzcan los siguientes textos, uno en cada fila: *Media aritmética*, *Mediana*, *Moda*, *Rango*, *Desviación media*;
- en otra columna cercana, introduzcan los datos del problema;
- en la celda a la derecha, *Media aritmética*, introduzcan la siguiente fórmula: =PROMEDIO(F3:F28); la función PROMEDIO está en el menú *FÓRMULAS* → *Más funciones* → *Estadísticas*; F3:F28 es el conjunto de celdas donde están los datos;
- en la celda a la derecha de *Mediana*, introduzcan la fórmula: =MEDIANA(F3:F28); la función MEDIANA está en la misma trayectoria que PROMEDIO;
- a la derecha de *Moda*, introduzcan: =MODA.UNO(F3:F28);
- a la derecha de *Rango*, introduzcan la siguiente expresión: =MAX(F3:F28)-MIN(F3:F28); las funciones MAX y MIN están en la misma trayectoria;
- en la celda a la derecha de *Desviación media*, introduzcan: =DESVPROM(F3:F28);
- cuando se introducen las fórmulas y expresiones anteriores, aparecen los resultados en las celdas respectivas;
- ¿Cuál es la medida de tendencia central más adecuada para representar estos datos? ¿Qué nos indican las medidas de dispersión sobre la distribución de estas edades?

  Expliquen: ____

  ____

> Comenten sobre este ejercicio en el grupo y con su profesor.

30 Probabilidad teórica de un evento

Durante tu primer grado en la escuela secundaria construiste el concepto de probabilidad frecuencial; en esta secuencia conocerás otra forma de definir la probabilidad de un evento, la de probabilidad teórica o clásica, y podrás comparar ambas nociones.

Recuperamos lo aprendido

1. **Lean lo siguiente y respondan.**

En un estudio reciente de 150 vuelos de la línea aérea A, mostró que 108 de ellos habían llegado a tiempo.

- ¿Cuál es la probabilidad que nuestro próximo vuelo por esa línea llegue a tiempo?

____

> Comparen y comenten en el grupo cómo lo resolvieron.

Recuerda que...

Un **experimento o experiencia aleatoria** es un fenómeno cuyos resultados no se pueden predecir, dependen del azar; pero es factible determinar todos sus posibles resultados, y se pueden repetir en condiciones similares.

Por ejemplo, si lanzamos un dado y observamos la cara que queda hacia arriba —aunque no podamos pronosticar que va a salir— sabemos que será alguno de los siguientes: 1, 2, 3, 4, 5 o 6; este es el **conjunto de posibles resultados** del experimento.

Un **evento** es una parte del conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio. Por ejemplo, el evento I en el experimento de lanzar un dado, puede ser el formado por los números impares 1, 3 y 5. Se dice que un evento ocurre si se observan uno o varios de sus resultados simples o elementales.

Una manera de obtener la probabilidad de un evento —que se estudió en primer grado— es por medio de la **probabilidad frecuencial**: para medir la mayor o menor tendencia de un evento E a ser observado, se calcula su frecuencia relativa:

$$\text{Probabilidad frecuencial del evento } E = P(E) = \frac{\text{Frecuencia en que ocurre el evento E}}{\text{Número de veces que se realizó el experimento}}$$

siempre que el experimento se repita un gran número de veces.

Con un mínimo de 30 a 50 veces que se repita un experimento, la frecuencia relativa con que se observa un evento empieza a estabilizarse alrededor de un resultado.

Sin embrago, mientras mayor sea el número de repeticiones, mejor será la aproximación. Como se trata de una experiencia aleatoria, si la llevamos a cabo una vez, no se puede saber qué se va a observar; aun con unas pocas repeticiones, el valor de la frecuencia relativa puede variar de manera importante.

Construyo algo nuevo

Noción de probabilidad teórica de un evento

1. Lean y contesten las preguntas siguientes por parejas.

a. Al tirar varias veces un dado normal de seis caras, ¿en qué fracción de los tiros se espera que aparezca el 5? ______________________________

b. Hoy Marcelino trajo caramelos y chocolates para obsequiar a sus compañeras. Son del mismo tamaño y tienen envolturas similares. Los trae en una bolsa, y ellas sacan su regalo sin ver.

Cuando le toca el turno a Irene, quedan en la bolsa cuatro caramelos y siete chocolates.

- ¿Qué es más probable que tome Irene: un chocolate o un caramelo? ¿Cuál es la probabilidad de que le toque un caramelo? ______________________________

____

c. Salvador va a rifar entre sus amigos el celular que ya no usa. Su hermana va a sacar un papelito con el número ganador de una caja con 30 números.

- Si Antonia compro dos boletos ¿Cuál es la probabilidad de que se gane el aparato? ______________________________

- Expliquen en el grupo como calcularon las probabilidades anteriores. ______________________________

____

- En cada una de las situaciones ¿los resultados posibles tiene la misma probabilidad de ocurrir? ¿Por qué? ______________________________

____

Hagamos una reflexión

Hay experimentos aleatorios donde todos los resultados tienen la misma tendencia a ocurrir. Por ejemplo, al lanzar un dado muchas veces, si está bien balanceado, la experiencia nos indica que las diferentes caras aparecerán el mismo número de veces: es lo que esperamos observar. Si todos los diferentes resultados de una experiencia aleatoria se observan con la misma frecuencia, se dice que son **resultados equiprobables**.

Si tenemos resultados equiprobables, es posible calcular su probabilidad sin necesidad de llevar a cabo el experimento.

Por ejemplo, al lanzar un dado hay seis posibles resultados, los cuales son equiprobables. Para conocer la probabilidad de que salga un 5, de todos esos resultados posibles nos interesa sólo uno; así, la probabilidad de obtener un 5 es de

$$P(\text{observar 5 al lanzar un dado}) = P(5) = \frac{1}{6}$$

Este mismo procedimiento se puede aplicar en las demás situaciones anteriores. Por ejemplo, en el caso de la rifa, Antonia puede ganar con cualquiera de los dos números que compró; estos serían sus resultados favorables; por otra parte, los posibles resultados —igualmente probables— son 30; por ello, su probabilidad de ganar es de

$$P(\text{ganar celular}) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Este procedimiento para calcular la probabilidad de un evento en un experimento aleatorio, donde todos los resultados posibles son equiprobables, se conoce como **probabilidad teórica o probabilidad clásica**:

La probabilidad teórica o probabilidad clásica de un evento E es el cociente del número de resultados favorables a dicho evento, entre el número total de resultados posibles del experimento aleatorio:

$$P(E) = \frac{\text{Número de resultados favorables a E}}{\text{Número de posibles resultados del experimento}}$$

cuando los resultados del experimento aleatorio son equiprobables.

2. **Resuelvan el siguiente problema por parejas.**

En la escuela se va a elegir por sorteo a un alumno de cada grupo de segundo grado para asistir a un evento. El número de alumnos y de alumnas en cada grupo es el siguiente:

Grupo	Número de alumnos	Número de alumnas	P(Alumna)
A	18	28	
B	31	24	
C	32	16	

- Encuentren la probabilidad de que sea elegida una alumna en cada uno de los grupos. ______________________

> **Al terminar, comenten entre los equipos.**

Relación entre probabilidad teórica y frecuencial

1. **Realicen lo que se indica y contesten las preguntas siguientes por equipos.**

Calculen la probabilidad de que una alumna sea elegida en el caso del grupo C del problema anterior, pero ahora por medio de la probabilidad frecuencial, es decir, repitiendo numerosas veces un experimento aleatorio.

A fin de calcular la probabilidad frecuencial, es necesario que en cada equipo lleven a cabo una simulación. Esta puede efectuarse con lanzamientos de un dado: la fracción de la matrícula que son alumnas en el grupo C es de $\frac{16}{48}$, que si se simplifica equivale a $\frac{1}{3}$.

Por lo anterior, una tercera parte de los resultados posibles cuando se tire el dado deben tomarse como equivalentes a observar una alumna; una manera de lograr esto es que cada vez que se tire el dado, el resultado se registre como sigue:

Si el número que sale en el dado es 1 o 2: registrar alumna elegida

Si el número que sale en el dado es 3, 4, 5 o 6: registrar alumno elegido

En cada equipo se repite el lanzamiento del dado cuando menos 30 veces.

- Registren en la siguiente tabla de frecuencias las veces que salen alumnas y alumnos, y con ellas, en el recuadro de abajo, calculen la probabilidad frecuencial de elegir una alumna.

Lanzamientos	1	2	3	4	5	6
Alumnas						
Alumnos						

Lanzamientos	7	8	9	10	11	12
Alumnas						
Alumnos						

Lanzamientos	13	14	15	16	17	18
Alumnas						
Alumnos						

Lanzamientos	19	20	21	22	23	24
Alumnas						
Alumnos						

Lanzamientos	25	26	27	28	29	30
Alumnas						
Alumnos						

- Comparen entre sí las probabilidades frecuenciales que se observaron en los equipos: ____________________

Reúnan las frecuencias de todos los equipos, y obtengan el total de veces que se repitió el experimento. En su cuaderno, calculen ahora la probabilidad frecuencial, utilizando la información de todo el grupo.

- ¿Qué tanto se acerca la probabilidad obtenida por la definición teórica a la probabilidad frecuencial? ______
- Comparen los resultados parciales con los totales y expliquen sus observaciones. ______

Hagamos una reflexión

Los cálculos de probabilidad de un evento, obtenidos por medio de la definición de probabilidad frecuencial, y a través de la probabilidad clásica, tienden a aproximarse cada vez más entre sí, a medida que se tienen más datos, es decir, cuando se van observando más repeticiones del experimento.

2. Realicen lo siguiente, por equipos.

Realicen la siguiente experiencia donde podrán observar la aproximación entre ambos procedimientos para calcular probabilidades de eventos. Cada equipo necesita un mazo de cartas inglesas; éste consta de 52 cartas en total, divididas en cuatro "palos": espadas, tréboles, corazones y diamantes. Por equipo, hagan lo siguiente:

- Escogerán una figura de su preferencia, por ejemplo tréboles.
- Después de barajar bien el mazo, sacarán una carta y anotarán si la figura es trébol o corresponde a otra figura.
- Repiten estos pasos 10 veces.
- Calculen la probabilidad frecuencial de tréboles, es decir, cuántas veces apareció un trébol con respecto al total de observaciones que hicieron.
- Comparen los resultados por equipo; también comparen los resultados de cada equipo con la probabilidad teórica de trébol. ______
- En una segunda etapa, repitan los pasos anteriores, pero en lugar de registrar solo 10 observaciones de la primera carta extraída, anotarán 40 observaciones.
- Comparen los resultados por equipo; también comparen los resultados de cada equipo con la probabilidad teórica de trébol. ______
- Comparen los resultados por equipo: ¿cómo son las probabilidades frecuenciales obtenidas con 10 y con 40 observaciones? En cada equipo los resultados ¿Cómo se comparan con la probabilidad teórica de trébol? ______
- Si se suman los resultados de todos los equipos del grupo, ¿cómo se compara ahora la probabilidad frecuencial con la teórica? ______

- En general, ¿qué sucede con las probabilidades frecuencial y teórica de un evento, a medida que aumentan las repeticiones del experimento o número de observaciones? ______________________________

> Compartan con otros equipos sus estrategias y resultados.

Para finalizar

1. Respondan lo siguiente.

La pregunta de la situación inicial de la secuencia, sobre la puntualidad de una línea aérea, sólo es posible responderla utilizando probabilidad frecuencial. Esto se debe a que no se cumplen los supuestos de la probabilidad teórica.

¿Cuáles son estos requisitos y por qué no se cumplen en este caso? ______________________________

> Discutan en su equipo y compartan sus observaciones y resultados con el grupo.

Trabaja con...

Trabajen por parejas.

Utilicen una hoja electrónica de cálculo para simular los lanzamientos de un dado u otros experimentos aleatorios.

Sigan el procedimiento para simular sucesivas observaciones de cartas de una baraja:

- Escriban en una celda de su hoja de cálculo el texto "Figura observada:", y en la celda a su derecha introduzcan la instrucción: =ALEATORIO.ENTRE(1;4) [menú Fórmulas]; esta instrucción presenta en la celda elegida, un número aleatorio entero del 1 al 4, cada vez que se oprima la tecla F9;
  - Asignen un número a la figura que eligieron; por ejemplo, número 1 para tréboles;
  - Efectúen 50 extracciones de cartas, apretando cada vez la tecla F9, y anotando si salió la 1 o alguna otra figura;
  - Con estos datos, calculen la probabilidad frecuencial de que se observe la figura 1:

$$P(\text{trébol}) = \frac{\square}{\square} \quad (50 \text{ extracciones})$$

  - Continúen realizando extracciones, hasta llegar a 100; vayan acumulando los datos a las primeras 50, y calculen nuevamente la probabilidad frecuencial:

$$P(\text{trébol}) = \frac{\square}{\square} \quad (100 \text{ extracciones})$$

- Comparen ahora la probabilidad teórica o clásica obtenida, con las dos estimaciones de probabilidad frecuencial ¿qué tan cercanos son los valores obtenidos, de la teórica con la primera y con la segunda frecuencial?

____

____

> Comenten sobre esta actividad entre parejas y con su profesor.

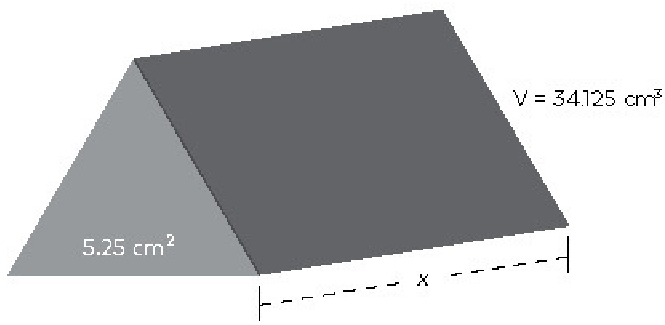
De manera individual resuelve los problemas. Registra tus procedimientos y respuestas.

1. ¿Cuánto tiene de volumen el silo? (toma π = 3.14)

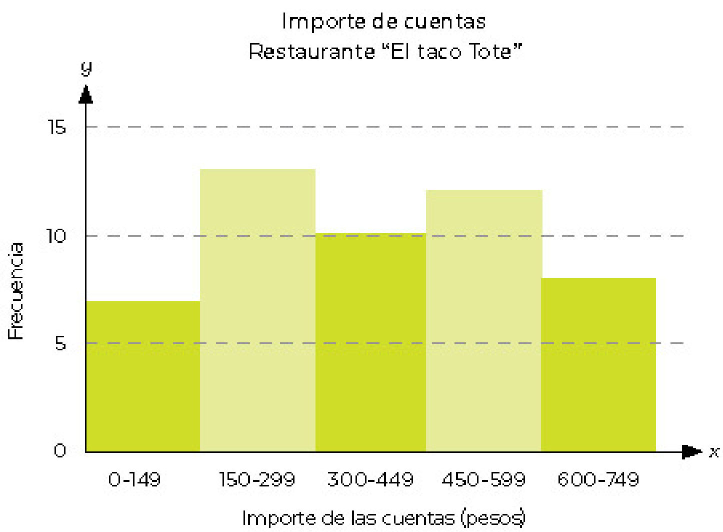
- $32.0\ m^3$
- $100.48\ m^3$
- $200.96\ m^3$
- $401.92\ m^3$

2. En el siguiente trozo de metal la superficie de la base es de $5.25\ cm^2$. ¿Cuánto mide de largo?

- 5.25 cm
- 6.5 cm
- 15.75 cm
- 39.375 cm



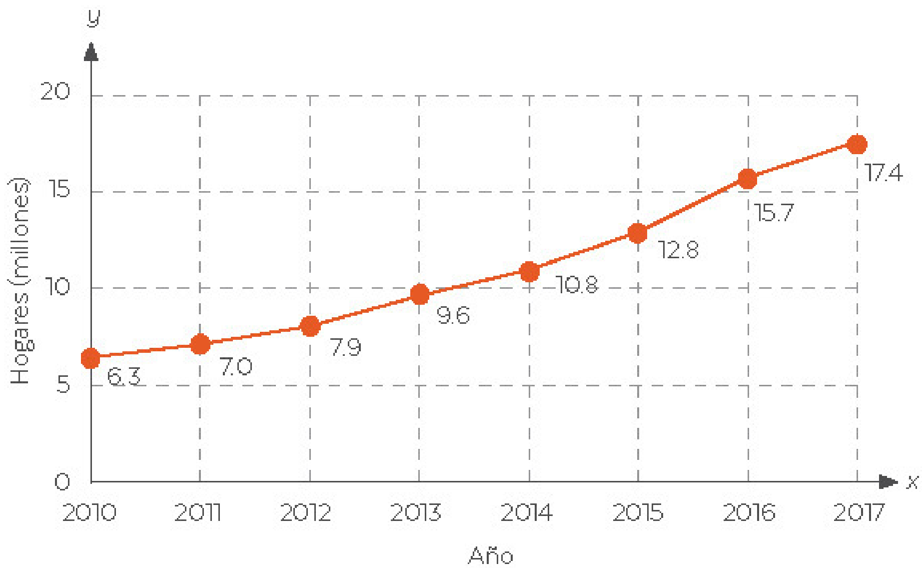
3. En la siguiente gráfica se muestra el ingreso de dinero en un fin de semana en el restaurante "El taco Tote".



- ¿En qué intervalo de clase están los importes de cuentas más bajos? ______
- ¿Y en cuál los más altos? ______
- ¿En qué intervalo se encuentra la parte media o central de los datos? ______
- ¿En qué intervalo se observan más importes de cuentas? ______
- ¿Cómo se distribuyen las cuentas donde hay más datos: en intervalos menores o mayores al del centro? ______

4. **La siguiente gráfica muestra el número de hogares con conexión a Internet en México:**

Hogares con conexión a Internet
México 2010-2017 (millones)



Fuente: https://bit.ly/2FjKeg2

- ¿Cuál fue el aumento en hogares con Internet de 2010 a 2017?

  a. 6.5 millones

  b. 9.4 millones

  c. 10.4 millones

  d. 11.1 millones

- A partir de 2010, ¿en qué año aproximadamente se duplicó el número de hogares con conexión a Internet?

  a. 3013

  b. 2014

  c. 2015

  d. 2017

- ¿En qué año fue mayor el incremento en hogares con Internet en el país?

---

5. Para el siguiente conjunto de datos, encuentra las medidas de tendencia central y de dispersión.

23,	28,	0,	35,	38,	14,	24,	0,
28,	27,	40,	24,	35,	0,	28,	31

- Media aritmética

  a. 23.44

  b. 27.5

  c. 28.85

  d. 40.9

- Mediana

  a. 27.5

  b. 28.0

  c. 29

  d. 42.0

- Moda

  a. 0

  b. 28

  c. 0 y 28

  d. 40

- Rango

a. 40
b. 10
c. 27.5

d. 23.44

- Desviación media

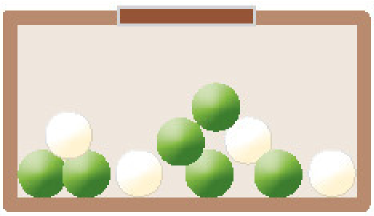
a. 40

b. 10

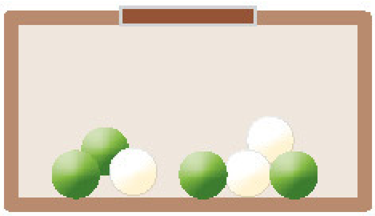
c. 27.5

d. 23.44

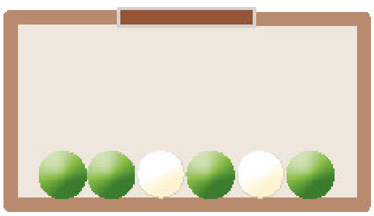
6. **Sin ver, sacarás una canica de una de las cajas. Ganas si la canica es blanca. ¿De cuál caja tomarás la canica?**



Caja 1



Caja 2



Caja 3

a. Caja 1

b. Caja 2

c. Caja 3

d. Cualquier caja

Fuentes bibliográficas

Fuentes para el alumno

- Perelman, Y. (1986). *Álgebra recreativa*. Moscú: MIR.
- Perelman, Y. (1986). *Aritmética recreativa*. Moscú: MIR.
- Perelman, Y. (1989). *Matemáticas recreativas* 1. México: Ediciones Roca.
- Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Tahan, M. (1994). *El hombre que calculaba*. México: Noriega.

Fuentes para el maestro

- Alarcón, J. y Rosas, R. (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria*. Lecturas. México: Secretaría de Educación Pública.
- Aragón, M., Benítez, R. y Valiente, S. (1988). *Diccionario de matemáticas para educación media*. México: Patria.
- Bell, E. T. (1995). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas*.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Fendel, D., Resek, D., Alper, L. y Fraser, S. (1997). *Interactive Mathematics Program*. Berkeley: Key Curriculum Press.
- Filloy, E. (1998). *Didáctica e historia de la geometría euclidiana*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Filloy, E. (1998). *Didáctica e historia de la geometría euclidiana*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Filloy, E. (Coordinador) (2003). *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. México: Fondo de Cultura Económica-Cinvestav.
- Guillén, G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Madrid: Síntesis.
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa*. México: Trillas.
- Savater Fernando (1997) *El valor de educar*. Instituto de estudios educativos y sindicales de América.
- Secretaría de Educación Pública. (2001). *Libro para el maestro. Matemáticas*. Educación básica. (Segunda edición revisada). México.
- Waldegg, G. y Block, D. (1997). *Estudios en didáctica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fuentes consultadas

- Astolfi Jean Pierre (1999). *El "error", un medio para enseñar.* Biblioteca para la actualización del maestro. SEP
- Bello, I. (1999). *Álgebra elemental.* S/d: International Thomson Editores.
- Colegio Nacional de Matemáticas. (2008). *Matemáticas simplificadas.* (Segunda edición). México: Pearson.
- Courant, R. y Robbins, H. (1962). *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar.
- Díaz G. J., Batanero, M. C. y Cañizares, M. J. (1996). *Azar y probabilidad.* Madrid: Síntesis.
- De la Peña, J. A. (1999). *Álgebra en todas partes.* México: Fondo de Cultura Económica.
- De la Peña, J. A. (Compilador). (2002). *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México.* México: Siglo XXIUNAM.
- García P.S. López E. O.L(2008). *La enseñanza de la geometría*. Instituto Nacional para la Evaluación de la educación.
- Secretaría de Educación Pública. (2000). *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo.* Enseñanza de las matemáticas con tecnología. México, SEP-ILCE.
- Secretaría de Educación Pública. (2001). *Libro para el maestro. Matemáticas.* Educación Secundaria. México, SEP.
- Secretaría de Educación Pública. (2001). *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas.* Educación Secundaria. México, SEP. Secretaría de Educación Pública. (2011).
- Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. M. y Hernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Triola, M. F. (2006). *Estadística.* (Novena edición). México: Pearson.
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa*. México: Trillas.

Colofón